الفصل الثالث

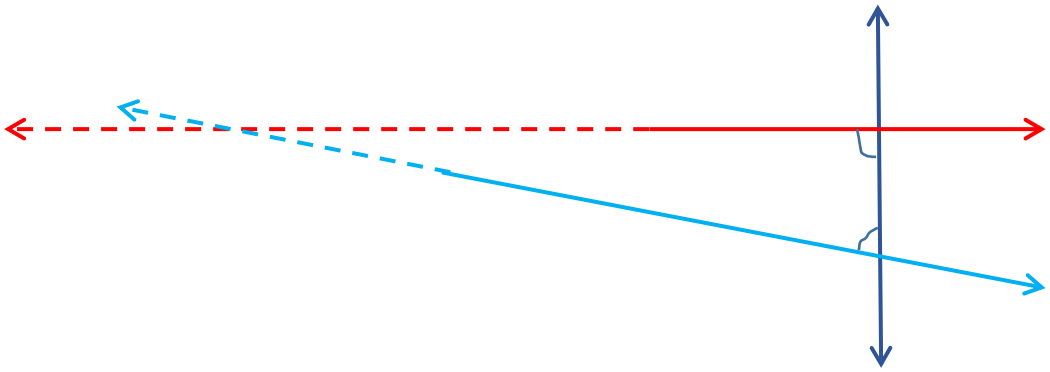
البديهية الخامسة لأقليدس

ان البديهية الخامسة لأقليدس كانت هدفاً لنقد علماء الرياضيات فقد برهن أقليدس مبرهناته ال (28) بدون ان يستخدم البديهية الخامسة وقد استند اليها لأول مرة في برهان مبرهنة (29) مما أثار انتباه العلماء حيث اعتقد بعض منهم بانها مبرهنة .

لقد حاول بعض العلماء برهنة هذه البديهية لكن هذه المحاولات كانت فاشلة لان البراهين كانت تعتمد على عبارات تكافئ البديهية الخامسة .

البديهية الخامسة (بديهية التوازي) :

اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث و كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين فأن المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع اذا مدا بغير حد.



بديهية بليفير :

وهي واحدة من المكافئات للبديهية الخامسة وتنص على

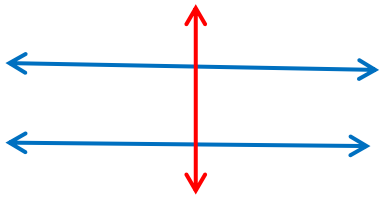
(من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم موازي واحد فقط للمستقيم المعلوم)
وهناك عبارة أخرى مكافئة للبديهية الخامسة وهي :

(مجموع زوايا مثلث تساوي دائما زاويتين قائمتين) وهذه هي نتيجة لبديهية بليفير ومن ثم للبديهية الخامسة.

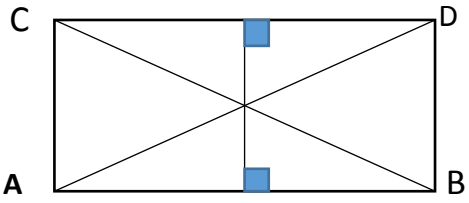
محاولات لبرهنة البديهية الخامسة او احدى مكافئاتها :

1- **محاولة بطليموس :** لقد برهن بطليموس المبرهنة التالية بدون استخدام البديهية الخامسة

مبرهنة : اذا قطع مستقيمان متوازيان بقاطع فأن الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتين والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين.



2- محاولة عمر الخيام : لقد حاول الخيام اثبات (اذا احتوى شكل رباعي على ثلاث زوايا قوائم فأن الزاوية الرابعة تكون قائمة أيضا)



فرض ان AB قطعة مستقيم وان AC و BD عمودان على AB بحيث ان AC = BD ووصل CD فيكون شكل رباعي فيه A > , B> زاويتين متجاورتين وقائمتين وضلعين متساويين لقد سمي الضلع الذي يصل الزاويتين القائمتين بالقاعدة والضلع الذي يقابل القاعدة بالسمت يدعى هذا الشكل رباعي الخيام (ولو ان الغربيين اطلقوا عليه اسم ساكيري باسم الرياضي الإيطالي ساكيري غير ان الخيام أحق بهذا التسمية لأنه سبق ساكيري بما يزيد عن 600 سنة) ثم برهن الخيام ان (المستقيم الواصل بين منتصفي القاعدة والسمت يكون عموديا على السمت والقاعدة)

نقد اقليدس

سنقدم هنا التعاريف والبديهيات التي ذكرها اقليدس في كتابه (الأصول) والتي استنتج منها مبرهناته وسنعطي دراسة انتقادية للنظام البديهي لإقليدس الذي هو الأساس للهندسة المستوية الاقليدية وسنشير الى بعض العيوب في طرق براهين اقليدس لمبرهناته.

التعاريف : لقد قدم اقليدس (23) تعريفا سنعرض (7) من هذه التعاريف

1. النقطة هي التي ليست لها ابعاد.
2. المستقيم هو طول بدون عرض.
3. نهايات المستقيم هي نقاط.
4. الخط المستقيم هو الخط الذي يقع كليا على نقاطه.
5. السطح هو الذي له طول وعرض فقط .
6. نهايات السطح هي خطوط .

7. السطح المستوي هو ذلك السطح الذي يقع كليا على مستقيماته .

الفرضيات : لقد اعطى اقليدس عشر فرضيات وقد قسمها الى مجموعتين سمى المجموعة الأولى مفاهيم عامة والثانية بالبديهيات (او الفرضيات).

مفاهيم عامة (Common Notions)

1. الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها .
2. اذا أضيفت كميات متساوية الى أخرى متساوية تكون النتائج متساوية.
3. اذا طرحت كميات متساوية من أخرى متساوية تكون النتائج متساوية .
4. الأشياء المتطابقة متساوية فيما بينها .
5. الكل اكبر من الجزء.

البديهيات (Postulates) :

1. من الممكن رسم خط مستقيم من أي نقطة الى أي نقطة .
2. يمكن مد قطعة المستقيم من جهتيها الى غير حد .
3. يمكن رسم دائرة اذا علم مركزها ونصف قطرها.
4. جميع الزوايا القوائم متساوية .
5. اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين فان المستقيمين اذا مدا بغير حد يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجموع الزاويتين اقل من قائمتين . (لاحظ الرسم صفحة 12)

المبرهنات : استنتج اقليدس (48) مبرهنة وفيما يلي سنعرض المبرهنات (1) ، (4) ، (9) و (10) .

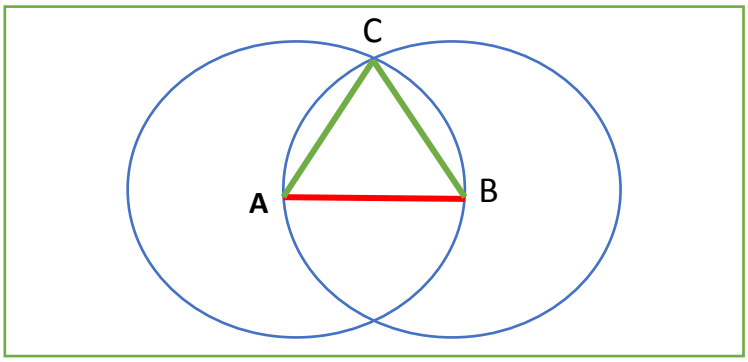
مبرهنة (1) :(كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم ومنتهي في الطول بتعبير اخر لأي قطعة يوجد مثلث متساوي الاضلاع له القطعة كضلع)

المعطيات : يوجد قطعه مستقيم AB .

المطلوب اثباته : من القطعة AB يمكن رسم مثلث متساوي الاضلاع له القطعة كضلع .

البرهان : لتكن AB قطعة . من البديهية (3) توجد دائرة مركزها A ونصف قطرها AB وكذلك توجد دائرة مركزها B ونصف قطرها AB

لتكن C نقطة تقاطع الدائرتين. من البديهية (1) توجد القطعتان AC,BC ومن تعريف الدائرة (الدائرة هي شكل مستوي محاط بخط بحيث ان كل أجزاء المستقيمات الواقعة على الخط من نقطة واحدة مشتركة داخل الشكل تكون متساوية فيما بينها)



BC=AB و AC=AB ولذلك AB = BC = AC وبهذا يكون المثلث ABC متساوي الاضلاع.

النقد : نلاحظ في هذه العملية ان اقليدس لم يبين لنا ان النقطة C موجودة حيث انه لا توجد بديهية عن تقاطع دائرتين وحتى لو فرضنا وجود النقطة C فمن المحتمل وقوعها على المستقيم AB وفي هذه الحالة لا يوجد المثلث ABC

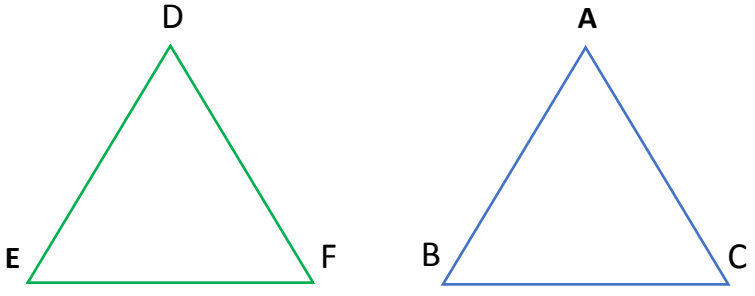
نلاحظ كذلك من البديهية (1) انه لكل نقطتين مختلفتين توجد قطعة مستقيم تصل بينهما ولكن لم يذكر اقليدس شيئاً عن وحدانية القطعة.

وكذلك ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تكون مثلثاً واحداً فقط وهذا لا يمكن برهانه من بديهيات اقليدس . في الواقع ان اقليدس لا يُعرِف المثلث بصورة عامة ولكنه يعرف مثلثات خاصة.

مبرهنة (4) : اذا تساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث اخر على التناظر يتساوى المثلثان وتتساوى الزوايا الباقية و الضلع من احدهما مع نظيره من الاخر.

المعطيات : في المثلثين ABC , DEF ، <A = <D ، DE=AB و DF=AC .

المطلوب اثباته : <E = <B ، <F = <C ، EF=BC .



البرهان:

يوضع المثلث ABC على المثلث DEF بحيث ان الرأس A يقع على الرأس D والضلع AB على الضلع DE

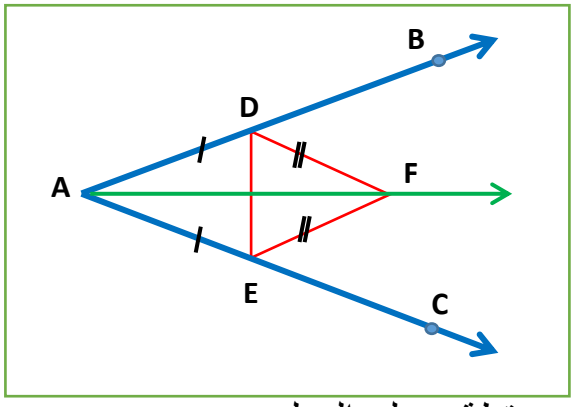
وبما ان AB=DE فان النقطة B تقع على E وبما ان <D = <A فان الضلع AC يقع على الضلع DF

وبما ان AC=DF فان الرأس C يقع على الرأس F لذلك فان

< C = < F , < B = < E , BC = EF

النقد : استعمل اقليدس في برهانه هذا طريقة نقل الاشكال كطريقة للبرهان

قد يكون هذا صحيحا في بعض الحالات ولكن تحريك مثلث غير ممكن فيزيائيا اذ لا يمكن بقاء الاشكال على حالها بدون ان تتغير .



مبرهـــنة (9): كيفية تنصيف زاوية مستوية.

المعطيات : توجد الزاوية المستويه BAC .

المطلوب اثباته : تنصيف الزاوية BAC .

البرهان :

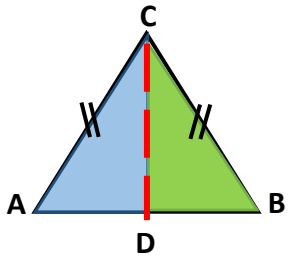
لتكن BAC زاوية ولتكن D نقطة على الضلع AB توجد نقطة E على الضلع AC بحيث ان AD = AE (من اكبر مستقيمين معلومين كيفية قطع جزء يساوي اصغر المستقيمين) ومن مبرهنة (1) يوجد مثلث متساوي الاضلاع EDF

ان الشعاع AF هو المنصف المطلوب للزاوية BAC لأنه من مبرهنة (8) (اذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعي اخر على التوالي وتساوت قاعدتهما تساوت زواياهما على التناظر)

يتساوى المثلثان ADF,AEF وبذلك فان <FAD = <FAE يؤدي الى ان

<BAF = <CAF

النقد : يعتمد اقليدس في هذا البرهان على الرسم اذ كيف برهن ان AF يقع في داخل الزاوية.



مبرهنـــة (10) : كيفية تنصيف قطعة مستقيم .

المعطيات : يوجد قطعه مستقيم AB .

المطلوب اثباته : تنصيف قطعه المستقيم AB .

البرهان : لتكن AB قطعة مستقيم ، من المبرهنة (1) يوجد مثلث متساوي الاضلاع ABC ومن المبرهنة (9) تنصف الزاوية ACB

لتكن D نقطة تقاطع هذا المنصف مع الضلع AB التي تقع بين A و B

من المبرهنة (4) يتساوى المثلثان ACD,BCD (بضلعين AC = BC والضلع المشترك CD , و الزاوية ACD=DCB) ومنه نستنتج ان AD = DB

النقد : قاطع اقليدس المنصف و AB في نقطة D التي من المحتمل ان تكون غير موجودة كذلك استخدم مفهوم (البين) بدون ان يتطرق اليه .