الفصل الــرابـــــع

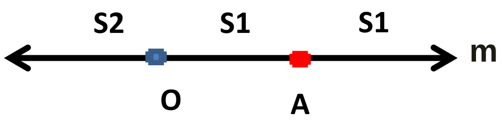
الفصل الــرابـــــع (المحاضرة3 و4)

المجمـــوعات المحــدبة (Convex Sets)

عريـــف (9) : تدعى المجموعة S مجموعة محدبة اذا وفقط اذا كان أي نقطتين تنتميان الى S فان P-Q تكون مجموعة جزئية من S .

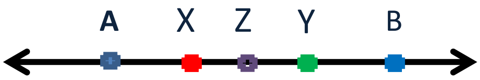
مبـــرهـنة (23) : (أ) أي مستقيم يكون مجموعة محدبة .

(ب) كل من جهتي نقطة O هي مجموعة محدبة .



مبـــرهـنة (24) : كل قطعة مستقيم هي مجموعة محدبة .

البرهان: لتكن A-B قطعة يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة محدبة . لتكن X و Y أي نقطتين مختلفتين في A-B يجب ان نبرهن ان X-Y هي مجموعة جزئية من A-B .



ليكن Z ϵ X-Y ⟵ X-Z-Y

X ϵ A-B ⟵ A-X-B

Y ϵ A-B ⟵ A-Y-B

من مبرهنة (5) و A-X-B و A-Y-B ⟵ A-Y-X او A-X-Y

عندما A-X-Y وبما ان X-Z-Y فان من مبرهنة (4) ⟵ A-X-Z-Y ⟵ A-Z-Y

و بما ان A-Y-B من مبرهنة (4) ⟵ A-Z-Y-B

⟵ A-Z-B ⟵ Z ϵ A-B

عندما A-Y-X من بديهية (5) يكون X-Y-A وبما ان X-Z-Y

من مبرهنة (4) ⟵ X-Z-Y-A ⟵ X-Z-A

من بديهية (5) ⟵ A-Z-X وبما ان A-X-B ومن مبرهنة (4) ⟵ A-Z-X-B

⟵ A-Z-B ⟵ Z ϵ A-B وبهذا فأن A-B هي مجموعة محدبة .

مبــــرهـنة (25) : كل من جهتي المستقيم m هي مجموعة محدبة.

مبـــرهـــنة (26) : تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة .

البرهان : ليكن $A= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ حيث ان A_1 و A_2 ..... و A_n هي مجموعات محدبة ، يجب ان نبرهن ان A هي مجموعة محدبة ،

لتكن Y,X نقطتين مختلفتين في A يجب ان نبين ان X-Y هي مجموعة جزئية من A

$X , Y \in A \longleftarrow X,Y \in A_n \ , \ \dots\dots \ X,Y \in A_2 \ , \ X,Y \in A_1$

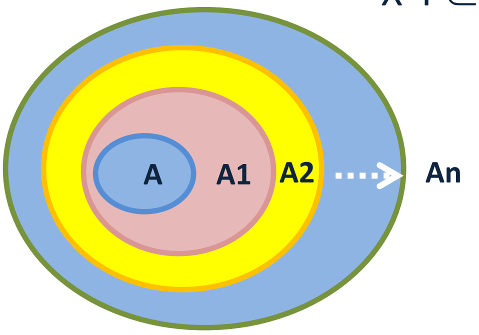
وبما ان A_n و A_2...... و A_1 هي مجموعات محدبة

$\longleftarrow X\text{-}Y \subset A_1$ و $X\text{-}Y \subset A_2$ و......و $X\text{-}Y \subset A_n$

$\longleftarrow X\text{-}Y \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots\dots \cap A_n$

$\longleftarrow X\text{-}Y \subset A$

$\longleftarrow$ A هي مجموعة محدبة .



تعريـــف (10) : تدعى جهتا نقطة O على مستقيم m بجهتي O المتعاكستين.

تعريـــف (11) : تدعى جهتا المستقيم m بجهتي m المتعاكستين .

مبـــرهـنة (27) :

أ- اذا كانت النقطتان A,B في جهتين متعاكستين من مستقيم m و B,C في نفس الجهة من m فان A,C في جهتين متعاكستين من m .

ب-اذا كانت النقطتان A,B في جهتين متعاكستين من مستقيم m و B,C في جهتين متعاكستين من m فان A,C في نفس الجهة من m .

ج- اذا كانت A,B في نفس الجهة من m وB,C في نفس الجهة من m فان C وa في نفس الجهة من m .

تعريـــف (12) : مجموعة كل النقاط على مستقيم في نفس الجهة من نقطة O تدعى شعاع وتدعى O نقطة البداية ،

الشعاعان المناظران لجهتي O يدعيان شعاعين متعاكسين ،

يرمز للشعاع الذي بدايته A وB نقطة على الشعاع بالرمز : $\overrightarrow{AB}$

أي ان AB هو مجموعة كل النقاط X على المستقيم AB بحيث ان A لا تقع بين X وB ، بتعبير اخر اما يكون A-X-B او -A-B-X .

مبــرهنــة (28) : واجــب

أ- الشعاع هو مجموعة محدبة (يستنتج حالاً من مبرهنة (23ب) ومن تعريف الشعاع) .

ب-الشعاع هو مجموعة جزئية من مستقيم (يبرهن من تعريف الشعاع) .

ج- للشعاع نقطة بداية وحيدة (يبرهن من تعريف الشعاع ومن مبرهنة (9)) .

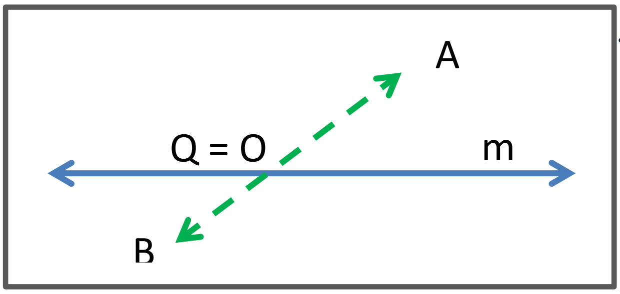
د- نقطة البداية لا تنتمي للشعاع (يبرهن مباشرة من مبرهنة (6) وتعريف الشعاع) .

هـ - لكل شعاع يوجد شعاع واحد معاكس له (يبرهن من تعريف الشعاع ومبرهنة (7)) .

ز- يتعين الشعاع من نقطة بدايته واي نقطة من نقاطه (يستنتج البرهان مباشرة من تعريف الشعاع ومبرهنة (8)) .

و- الشعاع الذي نقطة بدايته على مستقيم لكنه لا يقع على المستقيم فان كل نقاطه تقع في نفس الجهة من المستقيم.

برهــان فــرع (و) :



ليكن $\overrightarrow{OA}$ شعاع لا يقع على المستقيم m وان O على m . يجب ان نبرهن ان كل نقاط $\overrightarrow{OA}$ تقع في نفس الجهة من m

نفرض ان العبارة خطأ فتوجد نقطة B على $\overrightarrow{OA}$ بحيث ان B تقع في جهة m التي لا تحتوي على A أي ان A و B في جهتين متعاكستين من m

من تعريف الفصل ومبرهنة (20) حيث ان m يفصل جهتيه فانه توجد نقطة Q على m بحيث ان A-Q-B . من تعريف الشعاع الذي هو جزء من مستقيم , O تقع على المستقيم AB وبما ان A-Q-B فانه من بديهية (6) وQ تقع على

المستقيم AB أي ان الخط AB يقطع الخط m في النقطتين O وQ من بديهية

(1) يكون O = Q بما ان A-Q-B ⟵ A-O-B

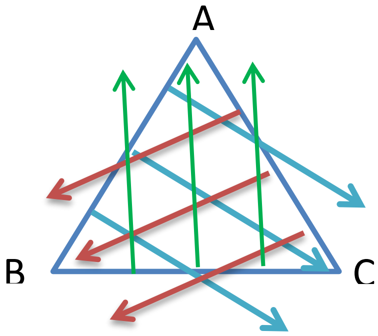
⟵ A و B في جهتين متعاكستين من O على الخط AB . بتعبير اخر A وB في شعاعين متعاكسين نقطة بدايتهما O

و هذا يخالف الفرض بان A وB تقعان على الشعاع $\overrightarrow{OA}$ لذل فان فرضيتنا خاطئة أي ان كل نقاط $\overrightarrow{OA}$ تقع في نفس الجهة من m .

داخـل وخــارج المثـلث

(The Inside and The Outside of a Triangle)

تعريف (13) : داخل ABC △ هو مجموعة كل النقاط الناتجة من تقاطع



جهة المستقيم AB التي تحتوي C

وجهة المستقيم AC التي تحتوي B

وجهة المستقيم BC التي تحتوي A

خارج المثــلث : هو مجموعة كل النقاط التي لا تقع على المثلث ولا تقع في داخله .

مبـرهـنة (29) : داخل المثلث هو مجموعة محدبة .

البرهان : ليكن ABC مثلثاً . داخل المثلث ABC هو تقاطع جهة AB التي تحتوي C و جهة AC التي تحتوي B وجهة BC التي تحتوي A .

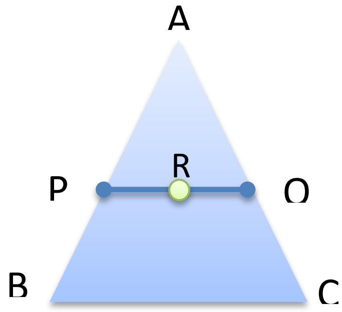
و من مبرهنة (25) ⟵ جهة المستقيم هي مجموعة محدبة ،

و من مبرهنة (26) ⟵ تقاطع (n=3) من المجموعات محدبة هي مجموعة محدبة

⟵ داخل ABC△ هو مجموعة محدبة .

مبـرهــنة (30) : اذا كانت Q وp نقطتين على ضلعي مثلث و R نقطة على المستقيم وفي داخل المثلث فان P-R-Q .

مبـــرهنة (31) : اذا كانت Q و P نقطتين على ضلعي مثلث فان P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث .



مبرهــنة (32) : داخل مثلث هو مجموعة غير خالية .

البرهان : ليكن ABC مثلثاً من بديهية (9)

توجد نقطة P بحيث ان A-P-B

وكذلك توجد نقطة Q بحيث A-Q-C

من مبرهنة (2) $P \neq Q$ من بديهية (9) توجد نقطة R

بحيث ان P-R-Q $\longrightarrow$ $R \in$ P-Q

من مبرهنة (31) و P-Q هي مجموعة جزئية من داخل المثلث

$\longrightarrow$ R في داخل المثلث لذا فان داخل المثلث هو مجموعة غير خالية .

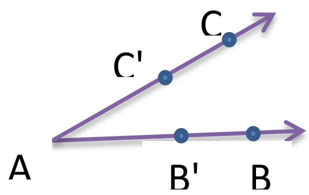
الزوايــــا (the angles)

تعريف (15) : ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين مختلفين لا يقعان على مستقيم واحد ولهما نقطة بداية مشتركة A , اتحاد الشعاعين مع نقطة البداية يدعى زاوية .

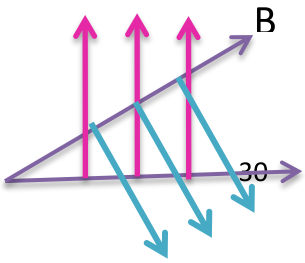
رمـز : يرمز للزاوية التي هي اتحاد الشعاعين AB و AC بالرمز : CAB < او BAC< او للتبسيط A < .

مبرهنة (33) : ليكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعين لا يقعان على مستقيم واحد و ان 'B على $\overrightarrow{AB}$ و 'C على $\overrightarrow{AC}$ فأن <BAC = <BAC' = <B'AC = <B'AC'

البرهان (واجب) (تبرهن من تعريف(15) ومبرهنة (28ز))



تعريف (16) : داخل زاوية CABهو تقاطع جهة الشعاع AC التي تحتوي B وجهة الشعاع AB التي تحتوي C.



A C

خارج الزاوية هو مجموعة كل النقاط التي لا تقع في داخل الزاوية ولا على الزاوية .

<u>مبـــرهنة (34) :</u> للزاوية يوجد رأس واحد فقط (واجب) .

(يستنتج مباشرة من تعريف الزاوية ومبرهنة (28ج)).

<u>مبـــرهنة (35)</u> : داخل الزاوية هو مجموعة غير خالية .

<u>البـرهان</u> : بما ان داخل المثلث هو مجموعة جزئية من داخل الزاوية , ومن مبرهنة (32) داخل المثلث هو مجموعة غير خالية فان داخل الزاوية هو مجموعة غير خالية .

<u>مبـــرهنة (36)</u>: داخل الزاوية هو مجموعة محدبة .

<u>البـرهان :</u> لتكن BAC زاوية , داخل <BAC هو تقاطع جهة $\overrightarrow{AB}$ التي تحتوي C وجهة $\overrightarrow{AC}$ التي تحتوي B. من مبرهنة (25) جهة المستقيم هي مجموعة محدبة ومن مبرهنة (26) تقاطع n من المجموعات المحدبة (n=2) هو مجموعة محدبة .

$\longleftarrow$ داخل <BAC هو مجموعة محدبة .

<u>مــبرهنــة (37)</u> : اذا كانت D نقطة في داخل <BAC فان كل نقطة على الشعاع $\overrightarrow{AD}$ تقع في داخل <BAC .