Numerical Integration :-

- Numerical integration is used to determine definite integrals that can not be solved by analytical methods

ان الصيغة العامة للتكامل المحدد هي :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

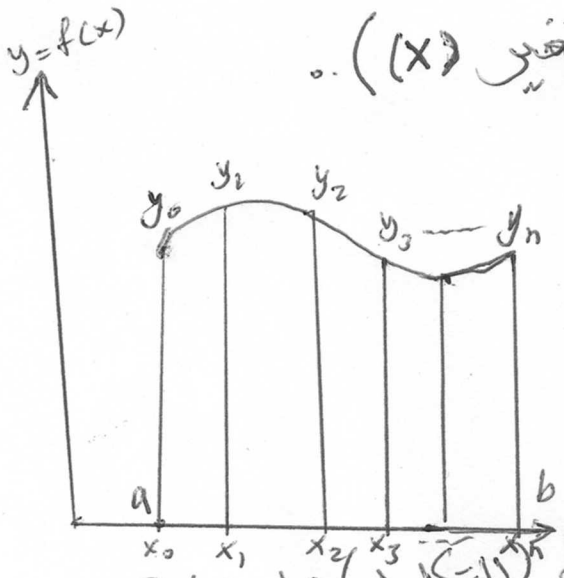
حيث ان a و b قيمتان محددتان وان $f(x)$ هي دالة مستمرة للمتغير x الذي يأخذ قيم $a \le x \le b$.

- يستخدم التكامل العددي لحساب قيم التكاملات المحددة (definite integrals) والتي لا يمكن حلها باستخدام الطرق التحليلية.

Methods of integration :-

① Trapezoidal method :-

- المنحني يمثل الدالة $y = f(x)$ (وهي دالة للمتغير (x)).
- اذا اردنا ان نكامل هذه الدالة خلال الفترة من a الى b : $I = \int_a^b f(x)\,dx$.



فأننا نقسم فترة التكامل [من a الى b] الى اجزاء متساوية عددها (n) وطول كل منها (h) حيث :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

- في الشكل اعلاه تكون المساحة تحت المنحني (التكامل) عبارة عن مجموعة من مساحات اشباه المنحرف، وهذا يعطي فكرة تقريبية للتكامل.
- كلما كان عدد اشباه المنحرف اكبر (n اكبر) كلما كانت الدقة في قيمة التكامل اكبر

(2)

- قيمة التكامل للدالة هي مجموع مساحات اشباه المنحرف تحت منحنى الدالة .

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})\right] \quad \text{---- (1)}$$

خوارزمية الحل :-

لإستخراج قيمة التكامل لدالة معينة $f(x)$ فاننا نقوم بالخطوات التالية :-

(1) تقسيم فترة التكامل الى (n) من الاجزاء واستخراج طول كل جزء h ، حيث :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

(2) عمل جدول بالشكل التالي

x_i	$y_i = f(x_i)$
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
⋮	⋮

حيث تزيد كل قيمة لـ x عن القيمة التي تسبقها بالمقدار h اي $x_{i+1} = x_i + h$.

(3) استخدام قيم (x_i) ، (y_i) التي حصلنا عليها في الجدول في المعادلة (1) لإستخراج قيم التكامل .

(4) قيم (x_i) في الجدول تبدأ من قيمة $(x = a)$ وتنتهي بالقيمة $(x = b)$ ، حيث a ، b تمثلان حدود التكامل :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx .$$

(3)

Example:- Determine the value of $\int_1^3 (2x^2 - x + 1)\,dx$ with $n = 4$ By Trapezoidal method.

Solution

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

x_i	$f(x_i) = 2x_i^2 - x_i + 1$
1	2
1.5	4
2	7
2.5	11
3	16

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)\right]$$

$$= \frac{0.5}{2}\left[2 + 16 + 2(4 + 7 + 11)\right]$$

$$I = 15.5$$

$$\therefore \int_1^3 (2x^2 - x + 1)\,dx = 15.5$$

Exercise:

By Trapezoidal method, find the value of

$\int_1^7 x \ln x\,dx$ where $n = 6$?