

①

Numerical Solution of Ordinary Differential Equations

* سيتم تناول المعادلات التفاضلية العددية {تحتوي على متغير مستقل واحد (x) ومن المرتبة الأولى} وأي تحتوي على المتغير الآخر كمتغير

* الصيغة العامة لهذه المعادلات: $dy/dx = F(x,y)$

* في هذه المسائل يتم إعطاء قيمة ابتدائية لكل من (x) و (y)، أي (x_0, y_0) والمطلوب هو استخراج القيم اللاحقة للدالة عندما يتم إعطاء قيم للاحقة للمتغير x أي :-

x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
⋮	⋮

قيم أولية تعطى في السؤال

قيم لاحقة يتم حسابها بالاعتناء على الطريقة المتبعة

لهذا عدة طرق عددية لحل المعادلات التفاضلية العددية :-

① Euler Method :-

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h F(x_i, y_i) \\ x_{i+1} &= x_i + h \end{aligned} \right\} \text{Euler general formula.}$$

ملاحظات :-

- لدينا دائما نقطة ابتدائية (x_0, y_0) تعطى في السؤال
- السؤال يطلب استخراج قيمة ل (الدالة) انطلاقاً من القيمة الأولية (y_0) عند $x = x_0$ ، وبمجرد الحصول على قيمة نهائية (y_n) عند $x = x_n$ (قيمة x_n تعطى في السؤال)
- التمرك من $x = x_0$ الى $x = x_n$ يتم من خلال خطوات Δx ، حيث $\Delta x = h$.
- في هذه الطريقة يتم حساب كل قيمة ل و ذلك بالاستقفاة من قيمة ل السابقة و x السابقة .

②

Example:- Use Euler method to approximate $y(x)$ for the differential equation: $dy/dx = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ from $x=0$ to $x=1.5$, with $h=0.25$, Given that $y(0)=1$.

Solution:

القيم الابتدائية لـ (x, y) هي $x_0=0, y_0=1$

- قيم x_n $h=0.25, 1.5 = x_n$

- باستخدام القانون: $y_{i+1} = y_i + h F(x_i, y_i)$
 $i=0, 1, 2, \dots$

$i=0$

$$y_1 = y_0 + h (-2x_0^3 + 12x_0^2 - 20x_0 + 8.5)$$
$$= 1 + 0.25(8.5) \Rightarrow y_1 = 3.125$$
$$x_1 = x_0 + h \Rightarrow 0.25$$

$i=1$

$$y_2 = y_1 + h F(x_1, y_1)$$
$$y_2 = 3.125 + 0.25(-2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5)$$

$\therefore y_2 = 4.1797, x_2 = x_1 + h \Rightarrow x_2 = 0.5$

$i=2$

$$y_3 = 4.4922, x_3 = x_2 + h \Rightarrow x_3 = 0.75$$

$i=3$

$$y_4 = 4.4922 + 0.25(-2(0.75)^3 + 12(0.75)^2 - 20(0.75) + 8.5)$$

$\therefore y_4 = 4.3438, x_4 = x_3 + h \Rightarrow x_4 = 1$

$i=4$

$$y_5 = 4.3438 + 0.25(-2(1)^3 + 12(1)^2 - 20(1) + 8.5)$$
$$y_5 = 4.2188, x_5 = x_4 + h, x_5 = 1.25$$

③

$i=5$

$$y_6 = 4.2188 + 0.25(-2(1.25)^3 + 12(1.25)^2 - 20(1.25) + 8.5)$$

$$y_6 = 3.8047, \quad x_6 = x_5 + h \Rightarrow x_6 = 1.5$$

ملاحظة: معرفة عدد خطوات الحل مسبقاً يسهل، ويستفاد من القيمة الأولية، والنهائية (x_n, x_0) للفترة x حسب:

$$n = (x_n - x_0) / h \Rightarrow h = \frac{1.5 - 0}{6} = 0.25$$

* كلما كانت (h) اصغر كلما كان الحل اذق.

Exercise

Use Euler method to approximate $y(2)$ from the differential equation:
 $\frac{dy}{dx} = x - y^2$, given that $y(0) = 0.75$,
 $h = 0.25$.