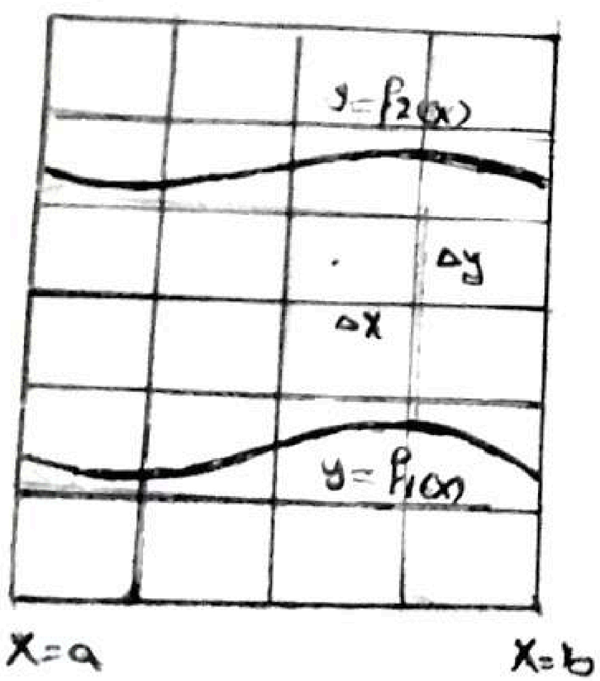
Double Integral

If R be closed region in the xy-plane, if f is function of two varibles that is define on the region R, then the double integral of f on R is written by

$$\iint_R f(x,y)\, dA \quad \text{or} \quad \iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$



نستعمل التكاملات الثنائية لحساب مساحة منطقة A محددة بالمنحني $y=f_2(x)$ من الاعلى المنحني $y=f_1(x)$ من الاسفل والمستقيم $x=a$ من اليسار والمستقيم $x=b$ من اليمين

عندما نريد حساب المساحة نستعمل الترميز $\iint_R f(x,y)$ يشير الى التكامل الثنائي فوق المنطقة A للدالة $f(x,y)$ حيث يتم ذلك من خلال ما يلي :-

- تجزأ المنطقة مثلاً الى مربعات ويتم ذلك عن طريق ان نتصور ان المنطقة A تقع بشبكة من الخطوط الموازية للمحورين x, y ولا ان هذه المستقيمات تقسم المستوي الى اجزاء صغيرة من المساحات $\Delta x\, \Delta y$, $\Delta y\, \Delta x$, ΔA
- نأخذ القطع ΔA الواقعة بالضبط داخل المنطقة بترتيب ما

$\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$

لذا من كل مربع عنصر من A_1 العنصر (x_1,y_1) ومن A_2 نأخذ (x_2,y_2) وهكذا الى العنصر (x_n,y_n) من A_n ثم نجد عدد هذه العناصر تحت تأثير الدالة f فنحصل بذلك على المجموعة

$$S_n = f(x_1,y_1)\Delta A_1 + f(x_2,y_2)\Delta A_2 + \cdots + f(x_n,y_n)\Delta A_n$$

S_n لكن (x_k,y_k) نقطة داخل ΔA_k لتشكل بعد ذلك المجموع

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

وهو يمثل حاصل ضرب عدد العناصر (x_n, y_n) بواسطة الدالة f في المساحة ويرمز له S_n.

اذا كانت $f(x,y)$ مستمرة في A واذا كانت المنحنيات المشكلة لحدود الشبكة مستمرة كما ان طول الكلي محدد عندئذ نحصل ايجاد عيون الشبكة عن طريق Δx ، Δy يقتربان الى الصفر (مثلا نأخذ $\Delta y = 2\Delta x$ ثم $\Delta x = 0$) ثم نجد

$$\lim_{\Delta A_n \to 0} S_n = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

$$\therefore \lim_{\Delta A \to 0} S_n = \iint_R f(x,y)\, dA$$

Existance of double integral

If f is a function of two varibles that continous on closed region R whose boundary is closed then $\iint_R f(x,y)\, dA$ exists.

Properties of the double integral

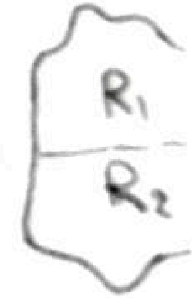
1- $\iint_{R} k\, f(x,y)\, dA = k \iint_{R} f(x,y)\, dA$, k is any constant

2- $\iint_{R} (f(x,y) \mp g(x,y))\, dA = \iint_{R} f(x,y)\, dA \mp \iint_{R} g(x,y)\, dA$

3- $\iint_{R} f(x,y)\, dA \geq 0$ if $f(x,y) \geq 0$ on R

4- $\iint_{R} f(x,y)\, dA \geq \iint_{R} g(x,y)\, dA$ if $f(x,y) \geq g(x,y)$ on R

5- $\iint_{R} f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R} f(x,y)\, dA$



where R is the union of two a non-over lapping rest angles R_1 and R_2.

6- If we take $f(x,y) = 1$ then $\iint_{R} f(x,y)\, dA$ = Area on R

7- The volume of solid boundary below by R and above by the surface $z = f(x,y)$ is defined by

$\iint_{R} f(x,y)\, dA$ = volume if $f(x,y) = z$ z تمثل ارتفاع الجسم

Ex Evaluate $\int_0^1 \int_x^{x-1} (x^2 + e^y)\, dy\, dx$

Solution $\int_0^1 \left(x^2 y \Big]_x^{x-1} + e^y \Big]_x^{x-1} \right) dx$

$= \int_0^1 x^2(x-1) + e^{x-1} - (x^3 + e^x)\, dx$

$= \int_0^1 x^3 - x^2 + e^{x-1} - x^3 - e^x)\, dx = \int_0^1 (-x^2 + e^{x-1} - e^x)$

$= \frac{-x^3}{3} + e^{x-1} - e^x \Big]_0^1 = (-\frac{1}{3} + 1 - e) - (0 + e^{-1} -$

$= \frac{5}{3} - e - \frac{1}{e}$

Ex Evaluate $\int_{-1}^1 \int_0^y xy\, e^{x^2}\, dx\, dy$

Solution
$\int_{-1}^1 \frac{y}{2} e^{x^2} \Big]_0^y dy = \int_{-1}^1 \frac{y}{2} (e^{y^2} - 1)\, dy$

$= \int_{-1}^1 \frac{y}{2} e^{y^2} dy - \int_{-1}^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4} e^{y^2} \Big|_{-1}^1 - \frac{y^2}{4} \Big|_{-1}^1$

$= (\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 0$

Fin
over
in th

Find the volume under the plane $z = 4 - x - y$ over the region $R: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$ in the xy-plane.

Solution

$$\text{volume} = \iint_R f(x,y)\, dA = \iint_R z\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(4y - \frac{y^2}{2} - yx\right)\Big]_0^1 dx$$

$$= \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{2} - x\right) dx - \int_0^2 0\, dx = 4x - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^2$$

$$= \frac{7x}{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{14}{2} - \frac{4}{2} = 7 - 2 = 5$$

then the volume $= 5$