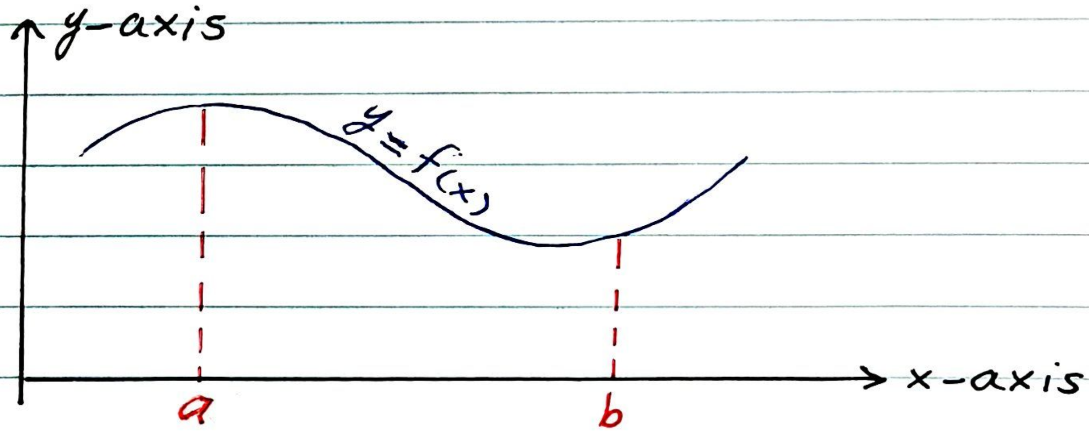
CH6: Numerical Integration

(Integral Approximation)

Numerical integration (integral approximation) is used to calculate a numerical approximation for the value of the definite integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$, which is the area under the curve $f(x)$ as it is shown in the following figure



and there are two reasons to use the numerical integration instead of using the analytical methods which are:

1) When we don't have an explicit function f of x, but we have only a given data of $n+1$ points (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ lies on the curve

$y=f(x)$ (which means that $y_i=f(x_i)$) and we want to find the approximate area $I=\int_a^b f(x)\,dx$ under the curve

$y=f(x)$ that pass through the given points and between the vertical lines $x=a$ and $x=b$, without knowing the exat formula of $f(x)$.

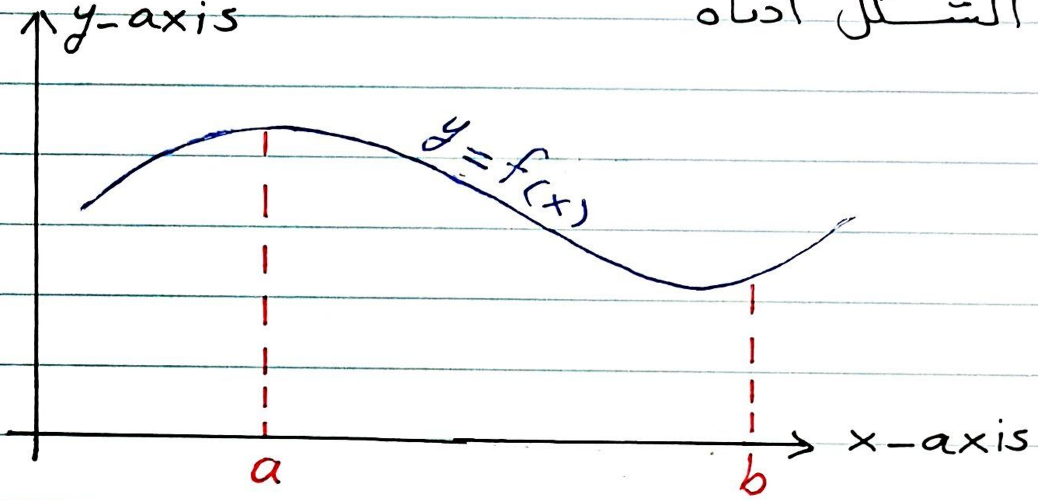
2) When the formula for the integrand $f(x)$ is known, but it may be difficult or impossible to find the value of $\int f(x)\,dx$ as an elementary function of x.

Each one of the above reasons required us to use the numerical integration.

There are many methods and rules for the numerical integration, but we will discuss only two of them in this chapter, which are the trapezoidal rule and the Simpson's rule.

التكامل العددي يستخدم لأحتساب التقريب العددي لقيمة التكامل المحدود $I=\int_a^b f(x)\,dx$ والذي يمثل

المساحة الواقعة تحت المنحني $f(x)$ بين المستقيمين العموديين $x=a$ و $x=b$ كما مبين في الشكل أدناه



وهنالك سببان كل واحد منها يدعونا لأستخدام التكامل العددي بدلاً من استخدام الطرق التحليلية المتعارف عليها أو قوانين التكامل ، وهذين السببين هما:

١) عندما لايكون لدينا صيغة صريحة للدالة f للمتغير x وإنما يتوفر لدينا $n+1$ من النقاط المعلومة الواقعة على المنحني $y=f(x)$ والنقاط هي (x_0, y_0) و (x_1, y_1) و .... و (x_n, y_n) (أي أن $y_i = f(x_i)$) وفي نفس الوقت نريد إيجاد القيمة التقريبية للمساحة الواقعة تحت المنحني $y=f(x)$ الذي يمر من النقاط المعطاة والمحصورة بين المستقيمين العموديين $x=a$ و $x=b$ من دون أن نعرف الصيغة الرياضية للدالة $f(x)$.

2) عندما تكون الصيغة الرياضية للدالة $f(x)$ معلومة ولكن هنالك صعوبة أو أستحالة لكتابة قيمة $\int f(x)\,dx$ بصيغة دالة للمتغير x.

هنالك عدة طرق وقواعد للتكامل العددي ولكننا سنناقش نوعين من هذه القواعد فقط وهما قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمبسون.

S1: Trapezoidal Rule:

1) When $f(x)$ is not known and we have only $n+1$ known points on the curve $y=f(x)$ which are $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, satisfying that $x_{i+1}-x_i = h$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ where h is a fixed number, then

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\right].$$

Example: By using the trapezoidal rule, find the value of $\int_2^3 f(x)\,dx$

where the graph of $y=f(x)$ pass through the points $(2, 9)$, $(2.2, 10.04)$, $(2.4, 11.16)$, $(2.6, 12.36)$, $(2.8, 13.64)$, $(3, 15)$.

Solution:

We have the following data table :

	x_i	$y_i = f(x_i)$	
x_0	2	9	y_0
x_1	2.2	10.04	y_1
x_2	2.4	11.16	y_2
x_3	2.6	12.36	y_3
x_4	2.8	13.64	y_4
x_5	3	15	y_5

$n =$ عدد النقاط $- 1$
$= 6 - 1$
$= 5$

and we have $h = x_{i+1} - x_i = 0.2$. Then

$$I = \int_2^3 f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + y_5 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\right]$$

$$= \frac{0.2}{2}\left[9 + 15 + 2(10.04 + 11.16 + 12.36 + 13.64)\right]$$

$$= 0.1 * 118.4 = 11.84 .$$

2) When $f(x)$ is known and defined on the interval $[a,b]$ and we want to evaluate an approximate value of $I = \int_a^b f(x)\,dx$

by using the trapezoidal rule then we will follow the following steps:

1. Divide the interval $[a,b]$ into n equal

parts each one of these parts of length $h = \frac{b-a}{n}$. Remember that when ever n become bigger the approximation of the integration I becomes more accurate.

2. Find the values of $y_i = f(x_i)$ for each $i = 0, 1, \ldots, n$.

3. Construct the table of the data that you get as follows:

x_i	$y_i = f(x_i)$
$a = x_0$	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
$b = x_n$	y_n

4. Find the sum of the n trapezoidals that you get as it is shown in the following figure (*):

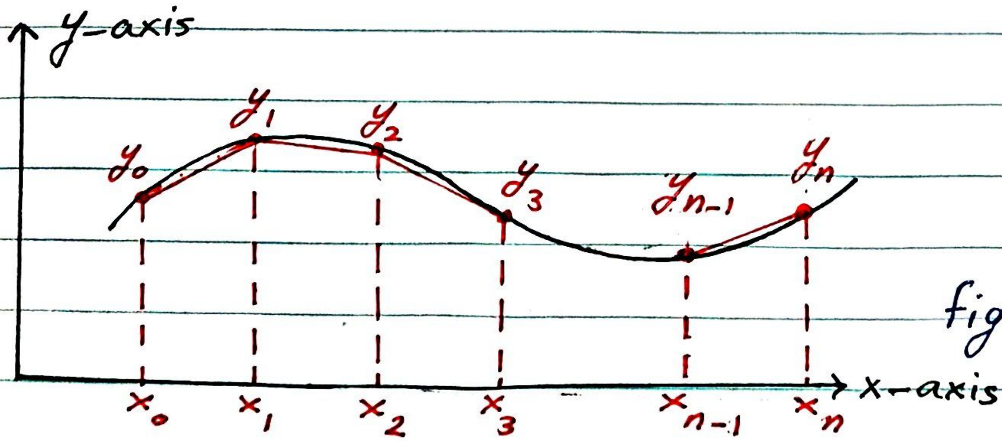


figure (*)

The sum of the areas of the n trapezoidals is the approximation of I, and thus we have

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0+y_n+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})\right]$$

We should use the above formula to find the approximation of the integral

$$I=\int_a^b f(x)\,dx .$$

عندما تكون الدالة $f(x)$ معلومة ومعرفه على الفترة $[a,b]$ ونريد احتساب قيمة تقريبية للتكامل

$I=\int_a^b f(x)\,dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف

فعلينا اتباع الخطوات التالية:

1) تقسيم الفترة $[a,b]$ إلى n من الأجزاء المتساوية كل جزء منها له طول يساوي $h=\frac{b-a}{n}$. علينا أن نتذكر بأنه كلما تكون n أكبر كلما يكون التقريب دقيقاً أكثر.

2) جد قيم $y_i=f(x_i)$ لكل $i=0,1,\ldots,n$.

3) أنشئ جدولاً للبيانات التي حصلت عليها وكما يلي:

x_i	$y_i = f(x_i)$
$a = x_0$	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
$b = x_n$	y_n

4) جد مجموع مساحات اشباه المنحرف التي عددها n التي حصلت عليها كما هو موضح في الشكل (*) حيث أن مجموع المساحات هنا يكون التقريب لقيمة التكامل I . لذا فإننا نحصل على مايلي :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\right]$$

وأن الصيغة الرياضية أعلاه هي التي يجب علينا استخدامها لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Example : By using the trapezoidal rule, find the value of $\int_2^4 (x^2 + 2x + 1)\,dx$, when $n = 5$.

Solution :

. Divide the interval to five equal parts to get $h = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$, which gives the following table :

x_i	$y_i = f(x_i) = x_i^2 + 2x_i + 1$
2	9
2.4	11.56
2.8	14.44
3.2	17.64
3.6	21.16
4	25

Then $I = \int_2^4 f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + y_5 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\right]$

$= \frac{0.4}{2}\left[9 + 25 + 2(11.56 + 14.44 + 17.64 + 21.16)\right]$

$= 0.2 * (34 + 129.6) = 0.2 * 163.6 = 32.72$.

Exercise :

1) By using the trapezoidal rule, find the value of $\int_1^3 f(x)\,dx$ where the graph of $y = f(x)$ pass through the points $(1, 4.2)$, $(1.5, 5.95)$, $(2, 8.2)$, $(2.5, 10.95)$, $(3, 14.2)$.

2) By using the trapezoidal rule, find the value of $\int_2^5 (x^3 + 3x - 2)\,dx$, when $n = 6$.