Chapter four

Integration التكامل

1- The Indefinite integral التكامل غير المحدد

Definition:

A function F is called an anti_derivative of a function $f(x)$ with respect to x if $\frac{d}{dx}\ F(x)$=$f(x)$ for all x in the domain of f.

The set of all anti_derivatives of f is the indefinite integral of f with respect to x , and denoted by

$$\int f(x)dx$$

ان الدالة $F(x)$ تدعى عكس المشتقة لدالة $f(x)$ اذا كانت $\grave{F}(x) = f(x)$ ولكل x ينتمي الى مجال الدالة f.

i.e

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

ملاحظة:

1- ان التكامل هو عكس التفاضل

For example, $\int 2x\ dx = x^2 + c$

2- ان التكامل الغير محدد للدالة المفروضة ليس وحيداً

For example, $x^2 + 4,\ \ x^2 - 5\ ,\ x^2 + 1$

هذه الدوال كلها تمثل تكامل غير محدد للدالة $2x$ اي انه يمكن كتابته

$$\int 2x\,dx = x^2 + 4$$

$$= x^2 + 5$$

$$= x^2 + 1$$

جميع هذه الدوال مشتقتها هي

$2x$

Properties of the indefinite Integral

1. $\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx + c$
2. $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + c$.
3. $\int k\, dx = k\, x + c$
4. $\int x^{n}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad , n \neq -1$
5. $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

The basic formula of integration

1- $\int 2x\, dx = \frac{2x^2}{2} = x^2 + c$

2- $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

3- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

4- $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

5- $\int csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

6- $\int \sec x \tan x = \sec x + c$

7- $\int \csc x \cot x = -\csc x + c$

8- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

9- $\int e^x dx = e^x + c$

Example:

1- $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c$

2- $\int (x^2 + 2)^{50}\, (2x) dx = \frac{[x^2+2]^{51}}{51} + c$

اذا قيمة مشتقة داخل القوس موجود نكامل بصورة عادية.

3- $\int [x^2 + 10]^{10}\, (x) dx$

$$= \frac{1}{2} \int [x^2 + 10]^{10}\, (2x) dx$$

نحتاج الى توفير مشتقة داخل القوس

بالتالي نحتاج الى الضرب والقسمة على (2).

$$= \frac{[x^2 + 10]^{11}}{11} + c$$

4- $\int \sin(x^2+5)(x)\ dx$

عند ايجاد التكامل للدوال المثلثية يجب ان تتوفر مشتقة داخل الزاوية كما في المثال وعليه نطبق القانون الخاص بالدالة.

Solution:

Let $u = x^2+5$ $\qquad du = 2x$

So,

$$\int \sin(x^2+5)(x)\ dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+5)(2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos(x^2+5)) + c$$

5- $\int e^{\sin x}\cos x\, dx$

Solution:

Let $u = \sin x$ $\qquad du = \cos x\, dx$

$$\Rightarrow \int e^{\sin x}\cos x\, dx = \int e^u\, du$$

$$= e^u + c$$

$$= e^{\sin x} + c$$

6- $\int cox^4 x \ \sin x \, dx$

Solution:

$$\int [\cos x]^4 \sin x \, dx$$

Let $u = \cos x$ $\quad\quad\quad \Rightarrow du = -\sin x \ \ dx$

$$\therefore \int [\cos x]^4 \sin x \, dx = -\int [\cos x]^4 \ (-\sin x \, dx)$$

$$= -\int u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^{4+1}}{4+1} = -\frac{u^5}{5} + c$$

$$\therefore \int cos^4 x \ \sin x \, dx = \frac{-u^5}{5} + c$$

$$= \frac{-(\cos x)^5}{5} + c$$

7- $\int x^7\ sec^2\,(x^8)\ dx$

يجب ان نحدد من هي الدالة ومن هي المشتقة

Solution:

$$sec^2 \rightarrow \quad \text{الدالة}$$

$$x^7 \rightarrow \quad \text{المشتقة للزاوية}$$

$$\therefore \int x^7\, sec^2\,(x^8)dx$$

$$= \int sec^2\,(x^8)\,(x^7 dx)$$

مشتقة الزاوية متوفرة لكن تحتاج الى ان نضرب في 8 ونقسم على 8 لكي تصبح المشتقة كاملة.

$$= \frac{1}{8}\int sec^2\,(x^8)\,(8x^7 dx)$$

$$= \frac{1}{8}\tan(x^8) + c$$

8- $\int sec^2 x\ tan^2 x\ dx$

$$\tan x \rightarrow \text{دالة}$$

$$sec^2 x \rightarrow \quad \text{الدالة مشتقة}$$

$$\therefore \int tan^2 x\,(sec^2 x)dx = \int [\tan x]^2\ sec^2 x\ dx$$

اصبح السؤال عبارة عن دالة مرفوعة الى اس ومشتقة داخل القوس موجودة الان نستطيع تطبيق القانون مباشرة

$$= \frac{[\tan x]^3}{3} + c$$

عندما يكون لدينا دالة كسرية ونريد ان نكاملها

1- نحدد من هو المقام

2- يجب ان تكون مشتقة المقام موجودة بالكامل

3- نطبق القانون ب اخذ (ln) للمقام

9- $\int \frac{1}{x}\ dx$

$$\int \frac{1}{x}\ dx\ = \ln|x| + c$$

10- $\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx\ = \ln|x^2+1| + c$$

11- $\int \frac{x+1}{x^2-1}\ dx$

Solution:

$$\int \frac{x+1}{x^2-1}\ dx = \int \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\ dx = \ln|x+1| + c$$

12- $\int \tan x\ dx$

$$\int \tan x\ dx\ = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\ dx$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

Homework:

1- $\int \sqrt{x+1}\ dx$

2- $\int \sqrt[3]{x^2+2}\quad x\ \ dx$

3- $\int sin\,(e^x)\quad e^x\quad dx$

4- $\int sin\,x\quad e^{cos\,x}\ dx$

5- $\int \frac{x\ \ sec^2\ x}{tan\ x^2}\,dx$

6- $\int sec^2(5x)\ dx$

7- $\int \frac{x^2}{x^3+1}\ dx$

8- $\int sec^3\ x\ \ \tan x\ \ dx$

9- $\int csc^5 x\quad \cot x\quad dx$

10- $\int \frac{e^x}{e^{x+1}}\quad dx$

11- $\int \frac{sec^2\ x + \cos x}{\sin x + \tan x + 4}\quad dx$

12- $\int sin^{10}(x^2+2x)(x+1)\ \ dx$

13- $\int x^4\ \ e^{x^5}\ \ dx$

14- $\int \sqrt[3]{\cos x}\ \sin x\ \ dx$

15- $\int \frac{x+1}{(x^2-5x-6)}\quad dx$