4- Fixed Point iterative method

خطوات الحل:

$f(x)$ → هي دالة معرفة ومستمرة على الفترة $[a,b]$
لإيجاد قيمة الجذر علينا اتباع الخطوات التالية

1- من الدالة المحظاة بالسؤال $f(x)$ نغير الترتيب وذلك بإبقاء متغير واحد x عند يسار المساواة

$$x = g(x)$$

وتحويل باقي المتغيرات عن يمين المساواة ونسميها $g(x)$

$g(x)$ ← هذه دالة جديدة

2- نشتق الدالة الجديدة $g(x)$ حتى نطبق عليها دقة الصيغة للوصول للحل وهذه الصيغة

صيغة التقارب

$$|g'(x_0)| < 1$$

x_0 ← $x_0 = \frac{a+b}{2}$ قيمة التقريبية للجذر يتم استخراجها من الفترة المحظاة بالسؤال

أذا كانت الصيغة اقل من (1) فاذا $g(x)$ هذه تكون قيمتها صحيحة ونكمل الحل باستخدام الصيغة الخاصة بطريقة Fixed Point وهي

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad i = 0,1,\dots$$

4- Fixed Point iterative method

* في حالة الصيغة $|g'(x_0)|$ تساوي 1 او اكبر فان الصيغة التي اخترت غير صحيحة ولا توصلنا للحل المطلوب

٣- استخدام شرط التوقف :- حتى نتوقف عن تكرار الخطوات

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \epsilon$$

Ex 1 :- Using the Fixed Point iterative method To find a root is:-

$$f(x) = 4x^2 + 2x + 1 \quad , \epsilon = 0.005$$
$$[0,1]$$

Solution:-

$$[\underset{a}{0}, \underset{b}{1}]$$

1- $f(a) = f(0) = 4(0)^2 + 2(0) - 1 = -1$

$f(b) = f(1) = 4 + 2 - 1 = 5$

$f(a) \cdot f(b) < 0$ ✓

2- $x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$

خطوة الثالثة:- استخراج قيمة $g(x)$

الدالة المعطاة بالسؤال $\rightarrow F(x) = 4x^2 + 2x - 1$

$$[4x^2 = 1 - 2x] \div 4 \rightarrow x = \frac{\sqrt{1-2x}}{2}$$

$$\therefore g_1(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{2} \longrightarrow \text{اول صيغة}$$

$|g'(x_0)| < 1$ اطبق عليها صيغة التقارب للوصول للحل الصحيح

$$g_1(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{2} \qquad g_1'(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{(2)^2}$$

تفضيل المشتقة للقسمة

$$\therefore g_1'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-2x}}$$

المقام x مشتقة البسط - البسط x مشتقة المقام / (المقام)²

$x_0 = 0.5$

$\sqrt{1-2x} = \frac{1}{2}(1-2x)^{-\frac{1}{2}} \times -2$ ← اشتقاق الجذر

$$\therefore g_1'(0.5) = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{1-(0.5)\times 2}} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$|g_1'(x_0)| = |-\infty| \not< 1$$

$\therefore g_1(x)$ ← هي دالة لا تؤدي الى الحل الصحيح .

هنستخرج $g_2(x)$ طريقة

$$f(x) = 4x^2 + 2x - 1$$

$$\hookrightarrow 4x^2 + 2x = 1$$

نقسم على x [$x(4x+2) = 1$]

$$\rightarrow x = \frac{1}{4x+2} = g_2(x)$$

$$\therefore g_2(x) = \frac{1}{4x+2}$$

* ايضا يجب ان نطبق عليها صيغة التقارب للتاكد من ان الدالة تباعدية

$$g_2'(x) = \frac{-4}{(4x+2)^2}$$

$$g_2'(x_0) = g_2'(0.5) = -0.25$$

$$|g_2'(x_0)| = |-0.25| < 1 \quad \checkmark$$

* لان نستطيع استخدام الصيغة العامة لطريقة Fixed Point

$$x_{i+1} = g_2(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots$$

$$i = 0 \rightarrow x_1 = g_2(x_0) = g(0.5)$$

$$= \frac{1}{4(0.5)+2} = 0.25$$

$i=1 \rightarrow x_2 = g_2(x_1) = g_2(0.25) = \frac{1}{4(0.25)+2}$

$x_2 = 0.333$

$|x_{i+1} - x_i| \leq \epsilon$ نطبق شرط التوقف

$|x_2 - x_1| = |0.333 - 0.25| = |0.083|$

$\not\leq 0.005$

$i=2 \rightarrow x_3 = g_2(x_2) = 0.3$

$|x_3 - x_2| = |0.3 - 0.333| = |-0.033|$

$\not\leq 0.005$

$i=3 \rightarrow x_4 = g_2(x_3) = 0.313$

$\rightarrow |0.313 - 0.3| = |0.013| \not\leq 0.005$

$i=4 \rightarrow x_5 = g_2(x_4) = 0.308$

$\rightarrow |0.308 - 0.313| = |0.005| = \epsilon$

$\therefore x_5 = 0.308$ is aroot.