E- Fixed-Point Iteration method

تعد هذه الطريقة لإيجاد جذور معادلة لا خطية و ذات المتغير الواحد من الطرق ذات الدقة العالية في الوصول الى الجذر.

لتكن f(x) دالة مستمرة في الفترة [a,b] وتحتوي على جذر حقيقي في هذه الفترة فلإيجاد قيمة الجذر بهذه الطريقة نتبع الخطوات الاتية:

1- اعادة ترتيب الدالة f(x)=0 وذلك بإبقاء متغير واحد (x) عند يسار المساواة وتحويل كافة المتغيرات بيمنى المساواة اي بالصيغة x=g(x)
حيث ان g(x) تعتبر دالة جديدة ل x وتختلف عن f(x)

2- اوجد مشتقة g(x)

3- تعويض قيمة التقدير الاولي للجذر (x_0) والتي تستخرج عادة من الفترة [a,b] ب$g'(x)$

4- اختبار مدى دقة الصيغة g(x) في الوصول للحل وذلك بتطبيق الصيغة

$$|g'(x)| < 1$$

فاذا كانت أ- الصيغة اعلاه صحيحة فان الصيغة g(x) وقيمة x_0 توصل للحل الصحيح

ب- اما اذا كانت

$$|g'(x)| \geq 1$$

فان الصيغة g(x) لا توصلنا للحل الصحيح او على الاغلب g(x) غير صحيحة

وفي حالة (أ) فأننا نكمل الحل بأخذ الصيغة العامة لg(x) وهي

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \ldots$$

اما في حالة (ب) فاننا نقوم بأيجاد صيغة اخرى لg(x) و مستخرجة من f(x) ونقوم بأعادة العمليات (2و3و4) الى ان نصل الى الصيغة الصحيحة لg(x)

شرط التوقف

Condition of stop

Using some mathematical formulas to stop doing calculations for this method.

1- $|x_{i+1} - x_i| < \in$

Example: Using fixed point iterative method to find a root

1- $f(x) = 4x^2 + 2x - 1, \qquad \in = 0.005$

2- $f(x) = x^2 - cos(x), \qquad \in = 0.001$ **H. W**

3- **find negative root for** $f(x) = x^2 - 2e^x + 1, \qquad \in = 0.009$ **H. W**

solution:

x	0	1
f(x)	-	+

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

الصيغة الاولى

$$4x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 - 2x$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{1-2x}{4}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{1-2x}}{2}$$
$$g_1(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{2}$$
$$g'_1(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{1-2x}}(-2) = \frac{-1}{2\sqrt{1-2x}}$$
$$g'_1(x_0) = g'_1(0.5) = \frac{-1}{2\sqrt{1-2(0.5)}} = -\frac{1}{0} = -\infty$$
$$|g'_1(x_0)| = |\infty| > 1$$

لا توصل للحل $g_1(x)$ $\therefore$

الصيغة الثانية

$$4x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 - 2x$$
$$\Rightarrow x = \frac{1-2x}{4x} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2}$$
$$g_2(x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2}$$
$$g'_2(x) = \frac{-4}{(4x)^2}$$
$$g'_2(x_0) = g'_2(0.5) = \frac{-4}{(4*(0.5))^2} = -\frac{1}{1} = -1$$
$$|g'_1(x_0)| = |1| \nless 1$$

لا توصل للحل $g_2(x)$ $\therefore$

الصيغة الثالثة

$$4x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 - 4x^2$$
$$\Rightarrow x = \frac{1-4x^2}{2} = \frac{1}{2} - 2x^2$$

$$g_3(x) = \frac{1}{2} - 2x^2$$
$$g'_3(x) = -4x$$

$$g'_3(x_0) = g'_3(0.5) = -4(0.5) = -2$$
$$|g'_3(x_0)| = |2| > 1$$

لا توصل للحل $g_3(x)$ $\therefore$

الصيغة الرابعة

$$4x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x(4x+2) = 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{4x+2}$$

$$g_4(x) = \frac{1}{4x+2}$$
$$g'_4(x) = -\frac{1}{(4x+2)^2} * 4$$

$$g'_4(x_0) = -\frac{4}{(4(0.5)+2)^2} = -0.25$$
$$|g'_4(x_0)| = |-0.25| < 1$$

توصلا للحل $g_4(x)$ $\therefore$

$$x_{i+1} = \frac{1}{4x_i + 2}$$
$$x_1 = \frac{1}{4x_0+2} = \frac{1}{4(0.5)+2} = 0.25$$
$$x_2 = \frac{1}{4x_2+2} = \frac{1}{4(0.25)+2} = 0.333$$
$$x_3 = \frac{1}{4x_2+2} = \frac{1}{4(0.333)+2} = 0.3$$

$$x_4 = \frac{1}{4x_3 + 2} = \frac{1}{4(0.3) + 2} = 0.313$$
$$x_5 = \frac{1}{4x_4 + 2} = \frac{1}{4(0.313) + 2} = 0.308$$

$$\because |x_5 - x_4| = |0.308 - 0.313| = |-0.005| = 0.005 = \epsilon$$
$$\therefore x_5 = 0.308 \; is \; a \; root$$