Numerical solution of the linear equations system

منظومة المعادلات الخطية هي مجموعة من المعادلات التي تحتوي على عدد من المعادلات وعدد من المتغيرات ومن الدرجة الاولى.

منظومة المعادلات الخطية الاتية

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

حلها ينقسم الى ثلاثة حالات.

1- اذا كانت عدد المعادلات اقل من عدد المتغيرات (المجاهيل) فأن المنظومة لها حل لكنه ليس وحيداً

$$x_1 + 3x_2 = 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 - 3x_2$$

2- اذا كانت عدد المعادلات اكثر من عدد المجاهيل فأن المنظومة قد لا يكون لها حلاً على الاطلاق.

$$2x_1 - 3x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$5x_1 - x_2 = 3$$

3- اذا كانت عدد المعادلات مساوياً الى عدد المجاهيل فأن المنظومة يكون لها حلاً وحيداً.

سوف نقتصر في دراستنا في هذا الفصل على الحالة الثالثة.

1. **Direct solution**
   a. Cramer rule
   b. Gaussian Elimination Method
   c. Gauss Jordan Method

2. **Iterative solution**
   2.1 Jacobi method.

تعد من اول الطرق التكرارية التي استخدمت لإيجاد الحل العددي وهي طريقة سهلة الاستخدام ولكن يعاب عليها بانها طريقة بطيئة في التوصل الى الحل الصحيح ويمكن توضيحها كما يلي:

The system given by

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Has a unique solution

Such that $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots . a_{nn} \neq 0$

يمكن اعادة صياغة المعادلات الخطية أعلاه بشكل يسمح لنا ايجاد قيمة x_1 من المعادلة الاولى وقيمة x_2 من المعادلة الثانية وهكذا الى قيمة x_n من المعادلة n كالاتي

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{31}x_3 - \cdots a_{2n}x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_3 - \cdots a_{nn-1}x_{n-1})$$

Then make an initial guess of the solution $x^0 = ({x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}, {x_1}^{(0)}, {x_n}^{(0)})$. Substitute these values into the right hand side of the rewritten equations to obtain the first approximation, $({x_1}^{(1)}, {x_2}^{(1)}, {x_1}^{(1)}, {x_n}^{(1)})$

$${x_1}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}{x_2}^{(0)} - a_{13}{x_3}^{(0)} - \cdots a_{1n}{x_n}^{(0)}\right)$$

$${x_2}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}{x_1}^{(0)} - a_{13}{x_3}^{(0)} - \cdots a_{1n}{x_n}^{(0)}\right)$$

$$\vdots$$

$${x_n}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}{x_2}^{(0)} - a_{13}{x_3}^{(0)} - \cdots a_{1n}{x_n}^{(0)}\right)$$

كذلك الحال بالنسبة الى قيم ${x_2}^{(1)}, {x_3}^{(1)}, \dots {x_n}^{(1)}$

فتصبح لدينا قيم جديدة وقريبة الى الحل الصحيح بالمقارنة مع القيم التقديرية الاولية . نكرر نفس العملية السابقة باعتبار قيم ${x_1}^{(1)}, {x_2}^{(1)}, {x_3}^{(1)}, \dots {x_n}^{(1)}$ قيم اولية والقيم الجديدة كما يلي

$${x_1}^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}{x_2}^{(1)} - a_{13}{x_3}^{(1)} - \cdots a_{1n}{x_n}^{(1)}\right)$$

$${x_2}^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{12}{x_1}^{(1)} - a_{13}{x_3}^{(1)} - \cdots a_{1n}{x_n}^{(1)}\right)$$

$$\vdots$$

$${x_n}^{(2)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{12}{x_2}^{(1)} - a_{13}{x_3}^{(1)} - \cdots a_{1n}{x_n}^{(1)}\right)$$

نستمر بأعادة هذه العملية الى k من المرات ثم نتوصل الى الحل المطلوب بتحقيق شرط التقارب او التوقف

$$\left|{x_i}^{(k+1)} - {x_i}^{(k)}\right| \leq \in$$

$$\left|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}\right| \leq \in$$
$$\left|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}\right| \leq \in$$
$$\left|x_3^{(4)} - x_3^{(3)}\right| \leq \in$$

The general formula of Jacobi method is

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots and \;\; k = 0, 1, \dots.$$

حيث تمثل k عدد التكرارات للتوصل الى الحل الصحيح

Condition of convergence

$$max \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{22}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| < 1$$

Example: By Jacobi's method find the solution of the following systems.

use three loops.

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$

where $(x_1^{(0)} = 1, x_2^{(0)} = 3, x_3^{(0)} = 2)$

Solution: $\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-2}{4}\right| = \frac{3}{4} = 0.75$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| = \left|\frac{1}{-7}\right| + \left|\frac{10}{-7}\right| = \frac{11}{7} = 1.572$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| + \left|\frac{3}{-1}\right| = 4$$

Max=4>1

يجب اعادة ترتيب المعادلات

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$

$$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{6} = 0.167$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{-7}{10}\right| = \frac{8}{10} = 0.8$$

Max=0.8<1 is convergence

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$
$$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_2^{(k)} - a_{32}x_3^{(k)}\right)$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(k)} + 7x_2^{(k)}\right)$$

$k = 0$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(1 - 3 + 4) = 0.5$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{3}(8 - 1 + 2) = 3$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(0)} + 7x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{10}(2 - 1 + 21) = 2.2$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(1 - 3 + 4.4) = 0.6$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{3}(8 - 0.5 + 2.2) = 3.233$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(1)} + 7x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{10}(2 - 0.5 + 21) = 2.25$$

$k = 2$

$$x_1^{(3)} = 0.567$$
$$x_2^{(3)} = 3.217$$
$$x_3^{(3)} = 2.403$$

1- Gauss-Seidel Method.

A possible improvement to the Jacobi Algorithm can be seen by re-considering Jacobi's method.

لاحظنا في طريقة Jacobi لحساب قيم المتغيرات $x_i^{(k+1)}$ نستعمل عناصر قيم المتغيرات $x_i^{(k)}$ فقط اما طريقة Gauss-Seidel فهي تعتبر تحسين لطريقة حيث تستخدم التقريبات المحسوبة بمجرد حسابها دون الانتظار الى دورة ثانية.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Has a unique solution, Such that $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots . a_{nn} \neq 0$

The Gauss-Seidel Iterative Technique

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots a_{1n}x_n^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots a_{2n}x_n^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \cdots a_{3n}x_n^{(k)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_2^{(k+1)} - a_{n2}x_3^{(k+1)} - \cdots a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)$$

The general formula of Gauss seidel method.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{\substack{j=i+1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad i = 1, 2, 3, \ldots \textit{and } k = 0, 1, \ldots.$$

شرط التوقف والوصول للحل الصحيح وكذلك شرط اقتراب النظام هو مشابه لما هو في طريقة Jacobi

Example: By Gauss-Seidel method find the solution of the following systems.

$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$, where $(x_1^{(0)} = 1, x_2^{(0)} = 3, x_3^{(0)} = 2)$

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$ use three loops.

$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(k+1)} + 7x_2^{(k+1)}\right)$$

K=0

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(1 - 3 + 4) = 0.5$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(1)} + x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{3}(8 - 0.5 + 2) = 3.167$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(1)} + 7x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{10}(2 - 0.5 + 22.167) = 2.367$$

K=1

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(1 - 3.167 + 4.733) = 0.642$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(2)} + x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{3}(8 - 0.642 + 2.367) = 3.242$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(2)} + 7x_2^{(2)}\right) = \frac{1}{10}(2 - 0.642 + 22.692) = 2.405$$

K=2

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(1 - 3.242 + 4.81) = 0.642$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{3}(8 - 0.642 + 2.405) = 3.254$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10}(2 - 0.642 + 22.780) = 2.414$$