Interpolation theory: نظرية الاندراج

كثيراً من المسائل التي تواجهنا هي ايجاد قيم غير معلومة على ضوء قيم او بيانات معلومة لمجموعة من الملاحظات. فعلى سبيل المثال اذا كانت المعلومات المتوفرة لنا لعدد سكان العراق هي فقط السنوات **1934, 1947, 1977, 1997,** فاذا اردنا تقدير عدد سكان العراق في العام **1940** او **1955** على ضوء البيانات المتوفرة تسمى هذه الطريقة بالاندراج او الاستكمال **(Interpolation)** اما اذا اردنا تخمين سكان العراق في سنة **2020** او **1920** على ضوء البيانات المعطاة فتسمى بالاستفهام **extrapolation**

1. Lagrange Interpolating Polynomials: صيغة لاكرانج لأيجاد متعددة الحدود

عندما تكون قيم **x** غير متساوية المسافة اي ان Δx غير متساوية ولأية قيمتين من قيم x المتسلسلة فيمكن استخدام صيغة لاكرانج لإيجاد قيمة الدالة $f(x)$ وهي اسهل الطرق العددية المستخدمة ويمكن توضيح نموذج لاكرانج من خلال البيانات التالية:

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

لتكن f دالة حقيقية ومستمرة على الفترة **[a,b]** وقيمتها معلومة عند النقاط x_0, x_1, x_2 لتقدير قيمة f في نقطة واحد x^* فأن صيغة لاكرانج تكتب بالصيغة

لذا فأن صيغة لاكرانج العامة هي

$$f(x^*) = f(x_0)\frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Example: By using Lagrange formula find the value of the function

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	1	2	5

Find $f(3)$ and $f(5)$

$$f(3) = f(x_0)\frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + f(x_1)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$
$$+ f(x_2)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f(x_3)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$f(3) = f(0)\frac{(3-1)(3-2)(3-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} + f(1)\frac{(3-0)(3-2)(3-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} + f(2)\frac{(3-0)(3-1)(3-4)}{(2-4)(2-1)(2-4)} + f(4)\frac{(3-0)(3-1)(3-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

$$f(3) = 1 * \frac{(3-1)(3-2)(3-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} + 1 * \frac{(3-0)(3-2)(3-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} + 2\frac{(3-0)(3-1)(3-4)}{(2-4)(2-1)(2-4)} + 5 * \frac{(3-0)(3-1)(3-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

$$\boldsymbol{f(3) = 0.25 - 1 + 3 + 1.25 = 3.5}$$

$$f(5) = f(x_0)\frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + f(x_1)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f(x_2)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f(x_4)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$f(5) = f(0)\frac{(5-1)(5-2)(5-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} + f(1)\frac{(5-0)(5-2)(5-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} + f(2)\frac{(5-0)(5-1)(5-4)}{(2-4)(2-1)(2-4)} + f(4)\frac{(5-0)(5-1)(5-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

$$\boldsymbol{f(5) = -1.5 + 5 - 10 + 1.25 = 6.5}$$

Inverse Interpolation الاندراج العكسي

عبارة عن عملية حساب قيمة x بدلالة القيم الجدولية للدالة y= f(x) , والصيغة العامة لها هي

$$g(y) = x^* = \sum_{j=0}^{n} x_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{y^* - y_i}{y_j - y_i}$$

If $n = 2$

$$x^* = x_0\frac{(y^* - y_1)(y^* - y_2)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} + x_1\frac{(y^* - y_0)(y^* - y_2)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} + x_2\frac{(y^* - y_0)(y^* - y_1)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)}$$

Example: Find the value of x^* when $y^* = 0.2703$, use the following table to find it.

Solution:

y	0.625	0.3448	0.2083
x	1.6	2.9	4.8

$$x^* = x_0 \frac{(y^* - y_1)(y^* - y_2)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} + x_1 \frac{(y^* - y_0)(y^* - y_2)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} + x_2 \frac{(y^* - y_0)(y^* - y_1)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)}$$

$$x^* = 1.6 \frac{(0.2703 - 0.3448)(0.2703 - 0.2083)}{(0.625 - 0.3448)(0.625 - 0.2083)} + 2.9 \frac{(0.2703 - 0.625)(0.2703 - 0.2083)}{(0.3448 - 0.625)(0.3448 - 0.2083)}$$

$$+ 4.8 \frac{(0.2703 - 0.625)(0.2703 - 0.3448)}{(0.2083 - 0.625)(0.2083 - 0.3448)}$$

$$= 1.6 \frac{-0.0046}{0.1169} + 2.9 \frac{-0.022}{-0.0382} + 4.8 \frac{0.0264}{0.0569}$$

$$= -0.06933 + 1.6702 + 2.2271 = 3.8658$$

Finite Differences الفروقات المنتهية

هناك ثلاثة انواع من الفروقات المنتهية وهي

1- Forward Differences (التقدمية) الفروقات الامامية

لتكن الدالة المستخدمة هي $y = f(x)$ وهي دالة حقيقية قيمتها معلومة في $n + 1$ من النقاط وهي معرفة في نقاط متساوية الابعاد وعلى النحو الاتي

$$x_0 \qquad , y_0 = f(x_0) = f_0$$

$$x_1 = x_0 + h, \quad y_1 = f(x_1) = f_1$$

$$x_2 = x_1 + h, y_2 = f(x_2) = f_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + h, y_n = f(x_n) = f_n$$

حيث h يعد ثابت بين قيم x

يرمز لعامل (مؤثر) الفروق الامامية بالرمز Δ operator ويعرف بالمعادلة الاتية

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \qquad (1)$$

يعرف الفرق الامامي الاول

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$

من خلال الفروق الاولى اعلاه يمكن كتابة الفرق الاول بصورة عامة

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad i = 0,1,2, \ldots\ldots, n-1$$

ويمكن ان نحصل على الفرق الثاني بأخذ الفروق للفرق الاول

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta(y_2 - y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - y_2 - y_2 + y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

من خلال الفروقات اعلاه يمكن كتابة الفرق الامامي الثاني بصورة عامة

$$\Delta^2 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$$

$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \qquad i = 0,1,2,\dots,n-2$$

وبتكرار الطريقة نفسها يمكن الحصول على الفروقات المنتهية الامامية الاتية

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i \qquad i = 0,1,2,\dots,n-3$$

$$\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i \qquad i = 0,1,2,\dots,n-4$$

يمكن الحصول على كل هذه الفروقات من جدول بسيط يكون كما اناه

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Example: write differences table of the function $f(x) = x^3$, use

$(x = 0,1,2,3,4)$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		
		37			
4	64				