

## Newton's interpolating polynomials formula

تستخدم صيغة نيوتن للاندراج اذا كانت المسافة بين قيم  $x$  متساوية اي ان

$$h = x_{i+1} - x_i = \text{constant}$$

لايجاد قيمة تقديرية للدالة عند النقطة  $x^*$  عندما تكون قيمة  $h$  ثابتة فان هناك ثلاثة صيغ لايجادها وهي

### 1. Newton's forward interpolation formula

$$f(x^*) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots$$

$$\text{such that } m = \frac{x^* - x_0}{h}$$

حيث  $x_0$  اقرب نقطة ل  $x^*$  و  $h$  مقدار الزيادة في قيم  $x$

Example: write the differences table and find  $f(2.3)$

$x_i$	$y_i$	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
2	2				
		-1			
4	1		3		
		2		0	
6	3		3		4
		5		4	
8	8		7		
		12			
10	20				

$$x^* = 2.3 \rightarrow x_0 = 2 \rightarrow m = \frac{2.3 - 2}{2} = \frac{0.3}{2} = 0.15$$

$$f(x^*) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 y_0$$

$$f(2.3) = 2 + (0.15)(-1) + \frac{0.15(0.15-1)}{2}(3) + \frac{0.15(0.15-1)(0.15-2)}{6}(0) + \frac{0.15(0.15-1)(0.15-2)(0.15-3)}{24}(4) = 1.547$$

## 2. Newton's backward interpolating formula

$$f(x^*) = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_0 + \dots$$

$$\text{such that } m = \frac{x^* - x_0}{h}$$

حيث  $x_0$  اقرب نقطة ل  $x^*$  و  $h$  مقدار الزيادة في قيم  $x$

Example: write the differences table and find  $f(10.5)$

$x_i$	$y_i$	$\nabla y_i$	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
2	2				
		-1			
4	1		3		
		2		0	
6	3		3		4
		5		4	
8	8		7		
		12			
10	20				

$$x^* = 10.5 \rightarrow x_0 = 10 \rightarrow m = \frac{10.5 - 10}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

$$f(x^*) = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}\nabla^4 y_0$$

$$f(10.5) = 20 + (0.25)(12) + \frac{0.25(0.25+1)}{2}(7) + \frac{0.25(0.25+1)(0.25+2)}{6}(4) + \frac{0.25(0.25+1)(0.25+2)(0.25+3)}{24}(4) = 24.934$$

ملاحظة:

- 1- تستخدم صيغة نيوتن التقدمة للاندرج عندما تكون قيمة  $x^*$  في بداية الجدول
- 2- تستخدم صيغة نيوتن التراجعية للاندرج عندما تكون قيمة  $x^*$  في نهاية الجدول

### 3. Central interpolating formula

هناك نوعان من الصيغ لإيجاد قيمة  $x^*$  و التي تكون في وسط الجدول

#### a- Bessel's formula

$$f(x^*) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \left(m - \frac{1}{2}\right) \delta y_{\frac{1}{2}} + \frac{m(m-1)}{2!} \frac{\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1}{2} + \frac{m(m-1)\left(m - \frac{1}{2}\right)}{3!} \delta^3 y_{\frac{1}{2}} \\ + \frac{m(m-1)(m+1)(m-2)}{4!} \frac{\delta^4 y_0 + \delta^4 y_1}{2} + \frac{m\left(m + \frac{1}{2}\right)(m+2)}{5!} \delta^5 y_{\frac{1}{2}} + \dots$$

#### b- Stirling's formula

$$f(x^*) = y_0 + m \frac{\delta y_{-\frac{1}{2}} + \delta y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2}{2!} \delta^2 y_0 + \frac{m(m^2-1)}{3!} \frac{\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2(m^2-1)}{4!} \delta^4 y_0 \\ + \frac{m(m^2-1)(m^2-4)}{5!} \frac{\delta^5 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^5 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \dots$$

such that  $m = \frac{x^* - x_0}{h}$

حيث  $x_0$  اقرب نقطة ل  $x^*$  و  $h$  مقدار الزيادة في قيم  $x$   
مسار صيغة بسل

$x_0$	$y_0$		$\delta^2 y_0$		$\delta^4 y_0$	
		$\delta y_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$		$\delta^5 y_{\frac{1}{2}}$
$x_1$	$y_1$		$\delta^2 y_1$		$\delta^4 y_1$	

مسار صيغة ستيرلنك

		$\delta y_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^5 y_{-\frac{1}{2}}$
$x_0$	$y_0$		$\delta^2 y_0$		$\delta^4 y_0$	
		$\delta y_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$		$\delta^5 y_{\frac{1}{2}}$

Example: write the differences table and find  $f(6.1)$

$x_i$	$y_i$	$\delta y_i$	$\delta^2 y_i$	$\delta^3 y_i$	$\delta^4 y_i$
2	2				
		-1			
4	1		3		
		2		0	
6	3		3		4
		5		4	
8	8		7		
		12			
10	20				

$$x^* = 6.1 \rightarrow x_0 = 6 \rightarrow m = \frac{6.1 - 6}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

Stirling formula

$$f(x^*) = y_0 + m \frac{\delta y_{-\frac{1}{2}} + \delta y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2}{2!} \delta^2 y_0 + \frac{m(m^2 - 1)}{3!} \frac{\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \delta^3 y_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{m^2(m^2 - 1)}{4!} \delta^4 y_0$$

$$f(6.1) = 3 + 0.05 \frac{2 + 5}{2} + \frac{(0.05)^2}{2!} 3 + \frac{0.05(0.05^2 - 1)}{6} \frac{0 + 4}{2} + \frac{0.05^2(0.05^2 - 1)}{24} 4 = 3.162$$