Divided finite differences

درسنا في المواضيع السابقة بعضا من صيغ الاندراج لاستخراج قيمة دالة عند نقطة معينة بالاعتماد على الفروقات المنتهية الاعتيادية والتي تعتمد على قيم الدالة في نقاط متساوية الابعاد (x_i) اما اذا كانت الابعاد بين النقاط المعلومة غير متساوية فان علينا ايجاد نوع اخر من الفروقات الذي يأخذ بنظر الاعتبار التغيير غير المنتظم في قيم نقاط (x_i) ويسمى هذا التغيير بالفروقات النسبية ويرمز لمؤثره ب Δ

ويعرف الفرق الاول

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Delta y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \qquad \Delta y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad \Delta y_{n-1} = \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

ويعرف الفرق الثاني

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1}-\Delta y_i}{x_{i+2}-x_i} \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

$$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{x_2-x_0}, \qquad \Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2-\Delta y_1}{x_3-x_1}, \qquad \Delta^2 y_{n-2} = \frac{\Delta y_{n-1}-\Delta y_{n-2}}{x_n-x_{n-2}}$$

ويعرف الفرق الثالث

$$\Delta^3 y_i = \frac{\Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i}{x_{i+3}-x_i} \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n-3$$

$$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0}{x_3-x_0}, \qquad \Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1}{x_3-x_1}, \qquad \Delta^3 y_{n-3} = \frac{\Delta^2 y_{n-2}-\Delta^2 y_{n-3}}{x_n-x_{n-3}}$$

ويعرف الفرق من الرتبة k

$$\Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1}-\Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k}-x_i} \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n-k$$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
		$\Delta y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{x_2-x_0}$	
		$\Delta y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1-\Delta y_0}{x_3-x_0}$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2-\Delta y_1}{x_3-x_1}$	
		$\Delta y_2 = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$		
x_3	y_3			

Example: write the table of the divided differences of $f(x) = x^3 + x - 1$
Use x=-2,0,1,4,5

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-2	-11				
		5			
0	-1		-1		
		2		1	
1	1		5		0.000
		22		1	
4	67		10		
		62			
5	129				

Newton's interpolating formula

لتقدير قيمة دالة في نقطة ما (x^*) بالاعتماد على جدول الفروقات النسبية نتبع الصيغة الرياضية الاتية

$$f(x^*) = y_0 + (x^* - x_0)\Delta y_0 + (x^* - x_0)(x^* - x_1)\Delta^2 y_0 + (x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)\Delta^3 y_0 + \dots$$

Example: write the table of the divided differences of $f(x) = x^3 + x - 1$
Use x=-2,0,1,4,5 and find f(-1) and f(2)

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
-2	-11				
		5			
0	-1		-1		
		2		1	
1	1		5		0.000
		22		1	
4	67		10		
		62			
5	129				

$$f(x^*) = y_0 + (x^* - x_0)\Delta y_0 + (x^* - x_0)(x^* - x_1)\Delta^2 y_0 + (x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)\Delta^3 y_0 + (x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)\Delta^4 y_0$$

$$f(-1) = -11 + (-1+2)5 + (-1+2)(-1-0)(-1) + (-1+2)(-1-0)(-1-1)(1) + (-1+2)(-1-0)(-1-1)(-1-4)(0) = -11 + 5 + 1 + 2 - 0 = -3$$

$$f(2) = -11 + (2+2)5 + (2+2)(2-0)(-1) + (2+2)(2-0)(2-1)(1) + (2+2)(2-0)(2-1)(2-4)(0) = -11 + 20 - 8 + 8 - 0 = 9$$

Numerical Differentiation: **الاشتقاق العددي**

ان ايجاد قيمة المشتقة f' للدالة f عند نقطة معينة يكون بسيطاً وذلك بأستخدام القواعد المعروفة للأشتقاق لمختلف انواع الدوال التي تكون صيغتها الرياضية معلومة وان قواعد الاشتقاق لايمكن تطبيقها عندما تكون صيغة الدالة f غير معروفة بشكل رياضي وانما تكون معلومة عند عدد محدود من نقاط منطلقها لذا يكون من الضروري وجود بعض الطرق التي تمكنا من ايجاد القيمة التقريبية لمشتقة الدالة f

اولاً: الاشتقاق العددي المبني على نقاط غير متساوية الابعاد

ويتضمن هذا النوع من الاشتقاق العددي على طريقتين وهما :

1- طريقة لاكرانج **Lagrange method**
2- طريقة نيوتن للفروقات النسبية **Newton's divided differences**

لايجاد قيمة المشتقة f' عند نقطة معينة فأننا نقوم بأيجاد صيغة الدالة f بالاعتماد على معطيات المسألة وبعد ذلك نقوم بأشتقاق صيغة الدالة وبعدها القيمة العددية للمشتقة عند النقطة المعلومة (المطلوبة)

Example: use the following table to find $f'(0.5), f'(3)$

1. **By Lagrange method** 2. **By newton's divided differences**

x	1	2	4
$f(x)$	0	1	5

Solution:

1. **Lagrange method**

$$f(x^*) = f(x_0)\frac{(x^*-x_1)(x^*-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x^*-x_0)(x^*-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x^*-x_0)(x^*-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f(x) = 0\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 1\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 5\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$

$$= 0 + \frac{x^2-4x-x+4}{-2} + 5\frac{x^2-2x-x+2}{6} = \frac{x^2-5x+4}{-2} + 5\frac{x^2-3x+2}{6}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{3} = 0.333x^2 - 0.333$$

$$f(x) = 0.333x^2 - 0.333$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 0.666x}$$

$$\boldsymbol{f'(0.5) = 0.666(0.5) = 0.333}$$

$$\boldsymbol{f'(3) = 0.666(3) = 1.998}$$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
1	0		
		1	
2	1		0.333
		2	
4	5		

$$f(x) = y_0 + (x - x_0)\Delta y_0 + (x - x_0)(x - x_1)\Delta^2 y_0$$
$$f(x) = 0 + (x - 1)(1) + (x - 1)(x - 2)(0.333) = x - 1 + 0.333(x^2 - 2x - x + 2)$$
$$= x - 1 + 0.33x^2 - x + 0.666 = 0.33x^2 - 0.333$$

$$f(x) = 0.33x^2 - 0.333$$

$$.\boldsymbol{f'(x) = 0.666x}$$

$$\boldsymbol{f'(0.5) = 0.666(0.5) = 0.333}$$

$$\boldsymbol{f'(3) = 0.666(3) = 1.998}$$