١٥

∴ Transformation ∴

((Transformation for Two random variables in Continuous case))

Def)
let X_1 and X_2 be two continuous r.v. with Joint pdf as $f(x_1, x_2)$

Then $Y_1 = h_1(X_1, X_2)$ and $Y_2 = h_2(X_1, X_2)$ has Joint density fun. Given as:-

$$g(y_1, y_2) = f(x_1 = w_1(y_1, y_2),\ x_2 = w_2(y_1, y_2)) \cdot |J|$$

Where $|J|$ is

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} \end{vmatrix} \quad , \text{where } |J| \neq 0.$$

Ex1) let $X_i \sim Exp(\theta)$, $i = 1, 2$ are indep. and let $y_1 = x_1 + x_2$ and $y_2 = x_2$

Find ① $g(y_1, y_2)$, ② $g(y_1)$

sol) Since $y_1 = x_1 + x_2$ and $y_2 = x_2$

نريدها بدلالة X فقط

$$x_1 = y_1 - x_2 \qquad x_2 = y_2$$

نعوض

$$x_1 = y_1 - y_2$$

Ex$_1$)

And

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_1}{dy_2} \\ \frac{dx_2}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |1-(-1\times 0)| = 1$$

Since $X_i \sim Exp(\theta_i)$, $i=1,2$ are indep.

$$\because \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) . f(x_2) = \frac{1}{\theta_1} . e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} . \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x_2}{\theta_2}}$$

هذه هي الدالة الاحتمالية المشتركة والتي يتم تعرفونها من X_1 , X_2

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta_1 . \theta_2} e^{-\frac{x_1}{\theta_1} - \frac{x_2}{\theta_2}} & , x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 \\ 0 & , o.w \end{cases}$$

$$g(y_1, y_2) = f(x_1 = w_1(y_1, y_2), x_2 = w_2(y_1, y_2)) . |J|$$

$$= \frac{1}{\theta_1 . \theta_2} e^{-\frac{y_1 - y_2}{\theta_1} - \frac{y_2}{\theta_2}} . |1|$$

هذه هي والا... بالنسبة للمتغ...

$$g(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1 \theta_2} e^{-\frac{y_1 - y_2}{\theta_1} \ \frac{y_2}{\theta_2}} & , y_1 \geq 0 , \overset{?}{y_2} \geq 0 \\ \Theta & , o.w \end{cases}$$

12

استخراج حدود التكامل بالنسبة y_2 وايضاً فضاء y

X_1	X_2	$Y_1 = X_1 + X_2$	$Y_2 = X_2$
0	0	0	0
0	∞	∞	∞
∞	0	∞	0
∞	∞	∞	∞

للتفسير pdf الدالة — شرط للدالة المشتركة

$$g(y_1) = \int_{y_2} g(y_1, y_2)\, dy_2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta_1\theta_2} e^{\frac{-y_1}{\theta_1} - y_2\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right)} dy_2$$

استخرج ثابت لان التكامل للـ y_2 وليس y_1

$$= \frac{1}{\theta_1 \cdot \theta_2} e^{\frac{-y_1}{\theta_1}} \int_0^{\infty} e^{-y_2\underbrace{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}\right)}_{a\,??}} dy_2$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ay_2} dy_2 = \frac{e^{-ay_2}}{-a} + c$$

$$\left[\frac{1}{-a} e^{-ay_2}\right]_0^{\infty}$$

اذا كانت $y_2 = \infty$ = (0)

اذا كانت $y_2 = 0$

$$= -\frac{1}{a} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-ay_2} dy_2 = \frac{1}{a} \text{ where}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\theta_1 \cdot \theta_2}} e^{\frac{-y_1}{\theta_1}} \cdot \frac{\cancel{\theta_1\theta_2}}{\theta_1 + \theta_2} (-0 + 1)$$

$$g(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} e^{\frac{-y_1}{\theta_1}}, & 0 < y_1 < \infty \\ 0, & o.w \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} = \frac{1}{\frac{\theta_2 + \theta_1}{\theta_1\theta_2}} \rightarrow \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1 + \theta_2}$$

ملاحظة هو أن المطلوب هو ايجاد الدالة pdf (y_1) فضاء نتيجة ذلك هو تكامل للدالة المشتركة ويكون التكامل بالنسبة لـ y_2 و حدود التكامل هي فضاء y_2 والعكس صحيح اي اذا طلب $g(y_2)$ نأخذ تكامل للدالة المشتركة للـ (y_1) وحدود التكامل هي فضاء (y_1)