9. Method of Point estimation

① Moment Method

Def :- let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a r.s from a probability distribut $f(x)$ where $f(x)$ can be discreat probability mass function (دالة الكتلة الاحتمالية) or continuous probability density function (دالة الكثافة الاحتمالية). The kth population (المجتمع) moment (عزوم) (or distribution moment) is $E(X^k)$, $k = 1, 2, \ldots$

The corresponding kth sample moment (عزوم العينة) is $\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} X_i^k$, $k = 1, 2, \ldots$

- let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a r.s from either a probability mass function or probability density function with m unknown

Parameters, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$, The moment estimators $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$, are found by equating The first m population moment to The first m Sample moment and Solving The resulting equation for The unknown parameters

تعتبر هذه الطريقة من اقدم الطرق في ايجاد مقدرات المعلمة المجهولة
θ وقد اوجدها العالم بيرسون فاذا كانت لدينا k من المعلمات المجهولة
فهذه الطريقة تعتمد على ايجاد k من عزوم المجتمع بدلالة k من المعلمات
ثم مساواة عزوم المجتمع مع ما يقابلها من عزوم العينة وبذلك نحصل على
k من المعادلات وبحل هذه المعادلات نحصل على المقدرات هنا بعين.

عزوم مجتمع، عزوم العينة

$$M_j = m_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \qquad j = 1, 2, \dots, k$$

where $m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j$ be The j^{th} Sample moment.

قانون عزوم مجتمع، قانون عزوم عينة

and $M_j = E(x_i^j)$ be The j^{th} population moment.

وعليه تكون ~~[illegible]~~ المعادلات المتكونة من خلال العلاقات التالية

1. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X} = E[X] \leftarrow$ في حالة كان $j=1$

2. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = E[X^2] \leftarrow j=2$ Solve Simultaneously for The j unknown parameters.

3. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = E[X^3]$

$\vdots$

j. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j = E[X^j]$

Ex1/ let $X \sim Beta(1,\theta)$, $i=1,2,\dots,n$ estimate θ by moment method.

Sol/ هنا لدينا معلمة واحدة مجهولة وعليه سنقوم بتكوين معادلة واحدة وهي الثامن العلاقة رقم ① في الشرح السابق

$m_j = \cancel{\mu_1} = \mu_j$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = E[X]$$

Since $X_i \sim Beta(1,\theta)$ Then $E[X] = \dfrac{1}{1+\theta}$ ملاحظة / بعد ان يتم تعويض قيم $\mu_j = m_j$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{X} = \frac{1}{1+\hat{\theta}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}} - 1 = \frac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$$

كل معلمة موجودة يتم تعويضها بدلالة مقدّر السؤال تم التعويض عن θ ب $\hat{\theta}$

is the moment estimator for θ.

Ex2/ let $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i=1,\dots,n$ Estimate the parameter μ and σ^2 by moment Method.

Sol/ سيتم تكوين معادلتين لان المطلوب تقدير معلمتين

The first eq. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = E[X]$

The 2nd eq. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = E[X^2]$

note That

Since $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \therefore E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$

and Since $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ Then $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$

Then $E(X) = \mu$ and $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$

$$\hat{\mu} = \bar{X} \text{ and } \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = \hat{\sigma}^2 + \bar{X}^2$$

نأخذ من باقي المعادلة ③

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{n\bar{X}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{X}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n} = S^2$$