Chapter four

Integration التكامل

1- The Indefinite integral التكامل غير المحدد

Definition:

A function F is called an anti_derivative of a function $f(x)$ with respect to x if $\frac{d}{dx}\ F(x)=f(x)$ for all x in the domain of f.

The set of all anti_derivatives of f is the indefinite integral of f with respect to x, and denoted by

$$\int f(x)dx$$

i.e

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

ان الدالة $F(x)$ تدعى عكس المشتقة لدالة $f(x)$ اذا كانت $F(x) = f(x)$
ولكل x ينتمي الى مجال الدالة f.

ملاحظة:

1- ان التكامل هو عكس التفاضل

For example, $\int 2x\ dx = x^2 + c$

2- ان التكامل الغير محدد للدالة المفروضة ليس وحيداً

For example, $x^2 + 4,\ \ x^2 - 5\ ,\ x^2 + 1$

م. نور اسماعيل

هذه الدوال كلها تمثل تكامل غير محدد للدالة $2x$ اي انه يمكن كتابته

$$\int 2x\,dx = x^2 + 4$$

$$= x^2 + 5$$

$$= x^2 + 1$$

جميع هذه الدوال مشتقتها هي

$2x$

Properties of the indefinite Integral

1. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx + c$
2. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + c.$
3. $\int k\,dx = k\,x + c$
4. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$
5. $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

The basic formula of integration

1- $\int 2x\,dx = \frac{2x^2}{2} = x^2 + c$

2- $\int sin\,x\,dx = -cos\,x + c$

3- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

4- $\int sec^2 x\,dx = tan\,x + c$

بدر اسماعيل

5- $\int csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

6- $\int \sec x \tan x = \sec x + c$

7- $\int \csc x \cot x = -\csc x + c$

8- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

9- $\int e^x dx = e^x + c$

Example:

1- $\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c$

2- $\int (x^2+2)^{50}\,(2x)dx = \frac{[x^2+2]^{51}}{51} + c$

اذا قيمة مشتقة داخل القوس موجود نكامل بصورة عادية.

3- $\int [x^2+10]^{10}\,(x)dx$

$$= \frac{1}{2}\int [x^2+10]^{10}\,(2x)dx$$

نحتاج الى توفير مشتقة داخل القوس

بالتالي نحتاج الى الضرب والقسمة على (2).

$$= \frac{[x^2+10]^{11}}{11} + c$$

م.م نور اسماعيل

4-$\int \sin(x^2+5)(x)\ dx$

عند ايجاد التكامل للدوال المثلثية يجب ان تتوفر مشتقة داخل الزاوية كما في المثال وعليه نطبق القانون الخاص بالدالة.

Solution:

Let $u = x^2 + 5$ $\quad du = 2x$

So,

$$\int \sin(x^2+5)(x)\ dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2+5)(2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos(x^2+5)) + c$$

5- $\int e^{\sin x}\cos x\, dx$

Solution:

Let $u = \sin x$ $\quad du = \cos x\, dx$

$$\Rightarrow \int e^{\sin x}\cos x\, dx = \int e^u\, du$$

$$= e^u + c$$

$$= e^{\sin x} + c$$

م. نور اسماعيل

6- $\int cox^4x \ \sin x \, dx$

Solution:

$$\int [\cos x]^4 \sin x \, dx$$

Let $u = \cos x$ $\Rightarrow du = -\sin x \ \ dx$

$$\therefore \int [\cos x]^4 \sin x \, dx = -\int [\cos x]^4 \ (-\sin x \, dx)$$

$$= -\int u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^{4+1}}{4+1} = -\frac{u^5}{5} + c$$

$$\therefore \int cos^4 x \ \sin x \, dx = \frac{-u^5}{5} + c$$

$$= \frac{-(\cos x)^5}{5} + c$$

م.م هوا اسماعيل

7- $\int x^7 \ sec^2 \ (x^8) \ dx$

يجب ان نحدد من هي الدالة ومن هي المشتقة

Solution:

$sec^2 \rightarrow$ الدالة

$x^7 \rightarrow$ المشتقة للزاوية

$$\therefore \int x^7 \ sec^2 \ (x^8) dx$$

مشتقة الزاوية متوفرة لكن تحتاج الى ان نضرب في 8 ونقسم على 8 لكي تصبح المشتقة كاملة.

$$= \int sec^2 \ (x^8) \ (x^7 dx)$$

$$= \frac{1}{8} \int sec^2 \ (x^8) \ (8x^7 dx)$$

$$= \frac{1}{8} \tan(x^8) + c$$

8- $\int sec^2 x \ tan^2 x \ dx$

$\tan x \rightarrow$ دالة

$sec^2 x \rightarrow$ الدالة مشتقة

اصبح السؤال عبارة عن دالة مرفوعة الى اس ومشتقة داخل القوس موجودة الان نستطيع تطبيق القانون مباشرة

$$\therefore \int tan^2 x \ (sec^2 x) dx = \int [\tan x]^2 \ sec^2 x \ dx$$

$$= \frac{[\tan x]^3}{3} + c$$

جود اسماعيل

عندما يكون لدينا دالة كسرية ونريد ان نكاملها

1- نحدد من هو المقام

2- يجب ان تكون مشتقة المقام موجودة بالكامل

3- نطبق القانون ب اخذ (ln) للمقام

9- $\int \frac{1}{x}\, dx$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$$

10- $\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln|x^2+1| + c$$

11- $\int \frac{x+1}{x^2-1}\, dx$

Solution:

$$\int \frac{x+1}{x^2-1}\, dx = \int \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\, dx = \ln|x+1| + c$$

12- $\int \tan x\, dx$

$$\int \tan x\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

ازهر نور اسماعيل

Homework:

1- $\int \sqrt{x+1}\ dx$

2- $\int \sqrt[3]{x^2+2}\ \ x\ dx$

3- $\int sin\,(e^x)\ \ e^x\ \ dx$

4- $\int sin\,x\ \ e^{cos\,x}\ dx$

5- $\int \frac{x\ sec^2\ x}{tan\,x^2}\,dx$

6- $\int sec^2(5x)\,dx$

7- $\int \frac{x^2}{x^3+1}\ dx$

8- $\int sec^3\,x\ \ \tan x\ \ dx$

9- $\int csc^5 x\ \ \cot x\ \ dx$

10- $\int \frac{e^x}{e^{x+1}}\ \ dx$

11- $\int \frac{sec^2\,x+\cos x}{\sin x+\tan x+4}\ \ dx$

12- $\int sin^{10}(x^2+2x)(x+1)\ \ dx$

13- $\int x^4\ e^{x^5}\ \ dx$

14- $\int \sqrt[3]{\cos x}\ \sin x\ \ dx$

15- $\int \frac{x+1}{(x^2-5x-6)}\ \ dx$

به نور اسماعیل